ГЛАВА 1 . ПРИЛОЖЕНИЯ В КУРСЕ "МАТЕМАТИКА В ЭКОНОМИКЕ" 4

§ 1. Вычисления 4

1.1. Арифметические формулы *4*
1.2. Элементарные функции *5*
1.3. Логические формулы. Функции И, ИЛИ, НЕ *7*

§ 2. Последовательности и суммы 11

2.1. Числовые последовательности данных *11*
2.2. Построение арифметической прогрессии *11*
2.3. Произвольные последовательности *12*
2.4. Операция суммирования. Функция СУММ *16*
2.5. Операция произведения. Функция ПРОИЗВЕД *17*
2.6. Комбинаторные формулы. Функция ЧИСЛКОМБ *19*
2.7. Среднее геометрическое. Функция СРГЕОМ *19*
2.8. Суммирование произведений. Функция СУММПРОИЗВ *20*
2.9. Операция усреднения. Функция СРЗНАЧ *20*

§ 3. Матрицы 22

3.1. Формирование матриц *22*
3.2. Нахождение наибольших и наименьших чисел из заданных списков. Функции МАКС, МИН *23*
3.3. Сумма и разность матриц *24*
3.4. Матричные функции *24*
3.5. Чувствительность матричных функций к изменению элементов матриц *27*

§ 4. Функции 28

4.1. Табулирование функций *28*
4.2. Графики кусочно-непрерывных функций. Функция ЕСЛИ *29*
4.3. Построение графиков параметрически заданных зависимостей *31*
4.4. Построение поверхностей *32*

§ 5. Производные и интегралы 34

5.1. Абсолютная и относительная погрешность *34*
5.2. Приближенное вычисление производных *34*
5.3. Приближенное вычисление определенных интегралов *36*
5.4. Формула Симпсона *37*

§ 6. Дифференциальные уравнения 39

6.1. Метод Эйлера *39*
6.2. Метод Рунге-Кутта второго порядка *40*
6.3. Метод Рунге-Кутта четвертого порядка *41*

§ 7. Экстремальные значения функций 42

7.1. Максимумы и минимумы функции *42*
7.2. Экстремальные значения при ограничениях *43*
*7.3. Чувствительность оптимального решения к изменению параметров*45

§ 8. Уравнения, системы уравнений и последовательности 47

8.1. Решение уравнений 47
8.2. Решение систем 47
8.3. Исследование последовательностей 49
8.4. Оптимизация в целых числах 50
8.5. Оптимизация в булевых переменных 51

§ 9. Неравенства 52

9.1. Обобщенный метод интервалов 52
9.2. Решение неравенств на отрезке 52

§ 10. Случайные числа 53

10.1. Вычисление характеристик дискретных случайных величин 53
10.2. Генерирование дискретных случайных чисел. Программа АНАЛИЗ ДАННЫХ. Гистограмма 53
10.3. Генерирование равномерно распределенных случайных чисел. Функция СЛЧИС 56
10.4. Генерирование нормально распределенных случайных чисел. Функция НОРМОБР 57
10.5. Квазислучайные последовательности 58
10.6. Система двух дискретных случайных величин. Коэффициент корреляции 60
10.7. Выборочный коэффициент корреляции. Функция КОРРЕЛ 61
10.8. Построение последовательностей отрицательно коррелированных случайных величин 62
10.9. Вычисление выборочного коэффициента автокорреляции 63
10.10. Логарифмически-нормальное распределение. Функция ЛОГНОРМОБР63
10.11. Генерирование зависимых нормально распределенных случайных величин 64
10.12. Моделирование генеральной совокупности и выборочного метода. Функция СУММКВРАЗН 67
10.13. Графики функций распределения и плотностей. Функции ХИ2РАСП, FРАСП, СТЬЮДРАСП 70
10.14. Нахождение критических точек распределений. Функции ХИ2ОБР, СТЬЮДРАСПОБР, FРАСПОБР 72

§ 11. Метод Монте – Карло 74

§ 12. Математическое ожидание и дисперсия непрерывной случайной величины (на примере бета-распределения) 77

§ 13. Коэффициент ранговой корреляции. Функции СЛУЧМЕЖДУ, РАНГ. 78

§ 14. Построение линий тренда и прогнозирование 80

§ 15. Задачи 82

15.1. Арифметические и логические выражения 82
15.2. Последовательности данных и суммирование 82
15.3. Операция усреднения 83
15.4. Операция произведения 84

15.5. Формирование матриц 84
15.6. Операции над матрицами 84
15.7. Построение графиков 86
15.8. Построение поверхностей 87
15.9. Приближенное нахождение производных и определенных интегралов 87
15.10. Дифференциальные уравнения 88
15.11. Алгебраические уравнения и неравенства...88
15.12. Системы уравнений...89
15.13. Оптимальные значения..89
15.14. Генерирование случайных чисел 90
15.15. Разные задачи 91

Глава 1 . Приложения в курсе "Математика в экономике"

§ 1. Вычисления

1.1. Арифметические формулы

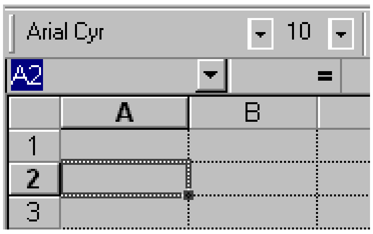
Формула всегда начинается со знака равенства.

Перечислим арифметические операторы: { +, – } сложение, вычитание; { *, / } умножение, деление; { ^ } возведение в степень.

Если формула содержит несколько операторов, то те будут обработаны в формуле в следующей последовательности: 1) знак отрицательного числа; 2) возведение в степень; 3) умножение, деление; 4) сложение, вычитание.

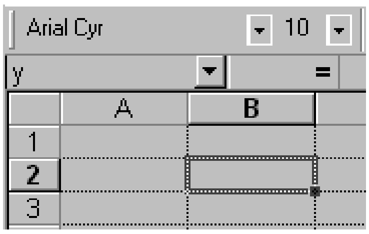
Минус имеет самый высокий приоритет, поэтому, например, результатом формулы { =–4^2+1} будет число 17, а не –15 (как принято в математике). Если формула содержит несколько операторов с одинаковым приоритетом, они будут выполнены слева направо. Для изменения последовательности выполнения операторов используются круглые скобки, выражения в скобках обрабатываются в первую очередь: {=6+4/2} равно 8; {=(6+4)/2} равно 5; {=12/3+1} равно 5; {=12/(3+1)} равно 3.

Присвоим ячейке A2 имя *x*. Для этого переходим в ячейку A2. Щелкаем курсором в поле имени активной ячейки.



Вводим с клавиатуры символ x. Нажимаем ENTER.

Присвоим ячейке B2 имя *y*. Выбираем ячейку B2. Щелкаем курсором в поле имени активной ячейки. Вводим с клавиатуры символ *y*.



Нажимаем ENTER.

Поместим в A2 число 4, а в B2 число 3.

Пример 1. Ввести в D1 формулу $\frac{1+x}{4y}$.

Решение.

В математике формулы “двумерные”, а в Excel формулы надо располагать в одной строке. Поэтому приходиться вводить дополнительные скобки, которых нет в исходной формуле: =(1+*x*)/(4**y*). Формула без использования имен имеет вид: =(1+A2)/(4*B2). В ячейке D1 выводится результат 0,416667.

Ошибочное решение: =1+x/4*y соответствует формуле $1+\frac{x}{4}y$. Ошибка вызвана тем, что деление обладает более высоким приоритетом, чем сложение, поэтому числитель надо поместить в скобки. Далее, умножение и деление имеют одинаковый приоритет, поэтому, чтобы вычислить знаменатель дроби, его тоже следует поместить в скобки.

Пример 2. Ввести в E1 формулу $\dfrac{x-2}{5+\dfrac{2x}{y^2+3}}$.

Решение.
В E1 вводим =(x–2)/(5+2*x/(y^2+3)). Результат: 0,352941.

Упражнение. В ячейку F1 ввести формулу $-2x+\dfrac{x^3}{3y^2+4}$. Правильный результат: –5,93548.

	A	B	C	D	E	F
1	x	y		0,416667	0,352941	–5,93548
2	4	3		17	–15	
3				2,236	1,380	

Пример 3. Ввести в D2 формулу –x2 + 1, а в ячейку E2 формулу 1 – x2.
С точки зрения алгебры разницы между результатами быть не должно. С точки зрения Excel это не так. Так как унарный минус в Excel имеет самый высокий приоритет, в первой формуле процессор сначала “навесит” знак минус на x, а затем результат возведет в квадрат. Во второй формуле знак минус бинарный (ставится между двумя операндами) и поэтому воспринимается как знак вычитания, а вычитание имеет меньший приоритет по сравнению с возведением в степень.

Пример 4. Вычислить в ячейке D3 $\sqrt{x+1}$.
Решение.
Для квадратного корня предусмотрена специальная функция КОРЕНЬ, поэтому решение имеет вид: =КОРЕНЬ(x+1)
Т.к. $\sqrt{x+1}=(x+1)^{1/2}$, то другое решение такое: =(x+1)^0,5 или =(x+1)^(1/2). *Ответ:* 2,236

Пример 5. Вычислить в ячейке E3 $\sqrt[5]{x+1}$.
Решение.
Для корней произвольных степеней специальных функций не предусмотрено. Так как $\sqrt[5]{x+1}=(x+1)^{1/5}$, то решение таково: =($x$+1)^(1/5) или =($x$+1)^0,2.
Ответ: 1,38.

1.2. Элементарные функции

Перечислим основные функции, соответствующие элементарным функциям, изучаемым в школьном курсе математики

sin x	cos x	tg x	arcsin x	e^x	ln x	|x|	arctg x
SIN(x)	COS(x)	TAN(x)	ASIN(x)	EXP(x)	LN(x)	ABS(x)	ATAN(x)

Упражнение. В ячейку F3 ввести формулу для вычисления функции

$\arcsin\dfrac{x}{x^2+1}+arctg(y+2)$. Напоминаем, что x – имя ячейки A2, y – имя ячейки B2.

Ответ: 1,61.

Если в формуле используется функция, то ее вычисление обладает наивысшим приоритетом. Например, нужно записать формулу для вычисления tg^2x . Неправильное решение: =TAN^2(x). Правильное решение: =TAN(x)^2 или без использования имени ячейки: =TAN(A2)^2.

Пример 6. Вложенные функции. Ввести в D4 формулу для вычисления функции $\sqrt{tgx+1}$.

Решение.

=КОРЕНЬ(TAN(x)+1) или =КОРЕНЬ(TAN(A2)+1).

Ответ: 1,469.

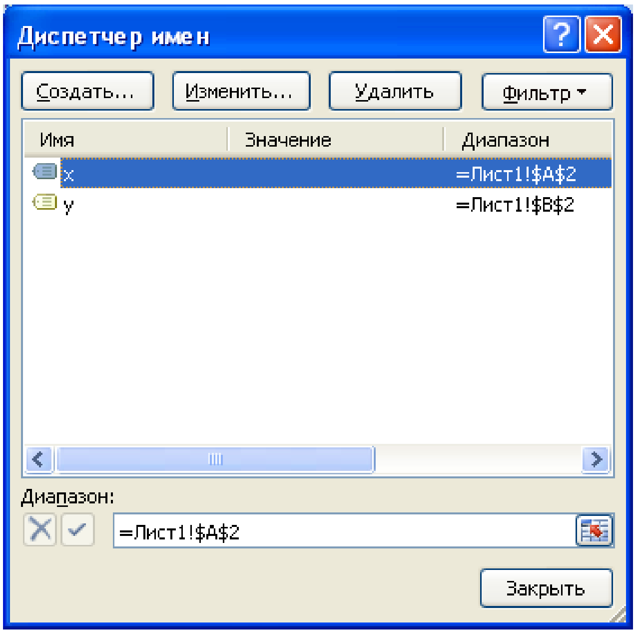
Пример 7. Вычислить: 1) число π; 2) число e (основание натурального логарифма); 3) log513; 4) eπ; 5) πe.

Решение.

1) используется специальная функция, которая не имеет аргументов, хотя скобки обязательны =ПИ(); 2) =EXP(1); 3) =LOG(13;5)

4) =EXP(ПИ()); 5) =ПИ()^EXP(1).

Упражнение. Удалить имена *x*, *y*, присвоенные ячейкам A2 и B2.



Вкладка ФОРМУЛЫ, группа ОПРЕДЕЛЕННЫЕ ИМЕНА, кнопка ДИСПЕТЧЕР ИМЕН, помечаем нужное имя и щелкаем по кнопке УДАЛИТЬ

Пример 8. Вычислить:

$$\frac{ctg5+\arccos(0{,}4)}{arcctg3+\left|\sqrt{2}-e\right|}$$

Решение. В библиотеке EXCEL нет функций для непосредственного вычисления ctg(x), arccos(x) и arcctg(x), поэтому пользуемся формулами:

ctg(x) = 1/tg(x); arcos(x) = π/2 – arcsin(x); arcctg(x) = π/2 – artg(x).

Итак, решение имеет вид:

=(1/TAN(5)+ПИ()/2-ASIN(0,4))/(ПИ()/2 – ATAN(3)+ABS(2^0,5 – EXP(1)))

Ответ: 0,531

1.3.Логические формулы. Функции И, ИЛИ, НЕ

Перечислим операторы сравнения: {=} равно; { < , > } меньше, больше; {<= } меньше или равно; { >= } больше или равно; { < > } не равно.

Перейдем на новый рабочий лист и дадим ему имя “Логика”.

Введем в ячейку А1 формулу: =5>3. Она вернет значение ИСТИНА. Введем в ячейку А2 формулу: =3=13. Она вернет значение ЛОЖЬ. Правые части обеих формул представляют собой *высказывания*, т.е. утверждения, относительно которых можно заключить, верны они или нет.

Присвоим ячейкам В2 и С2 имена *x* и *y* и введем в них числа 3 и 5. Введем в ячейку В3 формулу =x<8. Формула возвращает значение ИСТИНА. Введем в С3 формулу =x+y>=9. Формула возвращает значение ЛОЖЬ. В В3 и С3 записаны *предикаты*, т.е. высказывания, зависящие от переменных. В зависимости от значений переменных предикат может принимать значения ИСТИНА или ЛОЖЬ.

Пример предиката =(x^2+3*y)<=(x+10*y). В этом выражении скобки можно опустить, потому что арифметические операции имеют более высокий приоритет, чем операции сравнения, но скобки придают формуле наглядность.

Высказывание и предикат имеют общее название – логическое выражение. Имеются логические операции, которые позволяют строить сложные логические выражения.

Название	Обозначение	Функция Excel	Пример
Отрицание	$\neg$	НЕ	НЕ(x=1)
Конъюнкция (логическое. умножение)	$\cap$ (&)	И	И(3<x; y+1=5)
Дизъюнкция (логическое сложение)	$\cup$	ИЛИ	ИЛИ(x=y; x<3)

У логических функций аргументы могут принимать только два значения: ИСТИНА и ЛОЖЬ. Поэтому логические функции задаются *таблицами истинности*.

x	НЕ(x) $\bar{x}$
ЛОЖЬ	ИСТИНА
ИСТИНА	ЛОЖЬ

x	y	И(x;y) $x \cap y$	ИЛИ(x;y) $x \cup y$
ЛОЖЬ	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ
ЛОЖЬ	ИСТИНА	ЛОЖЬ	ИСТИНА
ИСТИНА	ЛОЖЬ	ЛОЖЬ	ИСТИНА
ИСТИНА	ИСТИНА	ИСТИНА	ИСТИНА

Функция И возвращает значение ИСТИНА только в том случае, когда все аргументы равны ИСТИНЕ (аргументов может быть больше двух). Например, формула =И(3>1; 5=1+4; 3^2=9) возвращает значение ИСТИНА, т.к. все три аргумента равны ИСТИНЕ. Функция И эквивалентна алгебраическому умножению.

Функция ИЛИ возвращает значение ИСТИНА, если хотя бы один аргумент равен ИСТИНЕ. Например, формула =ИЛИ(2>5; 3>5; 6>5) возвращает значение ИС-

ТИНА, т.к. третий аргумент есть ИСТИНА. Функция ИЛИ эквивалентна алгебраическому сложению.

Пример 9. В ячейке D2 (с именем z) записано число 3. Выяснить, принадлежит ли оно отрезку [2, 5].

Решение.

Присвоим ячейке D2 имя z. Введем в D2 число 3. Условие $z\in[2, 5]$ эквивалентно выполнению двух условий $z \le 5$ и $z \ge 2$. Вводим в D3 формулу: =И(z>=2;z<=5). Получим значение ИСТИНА.

Следует предостеречь от неверного решения: =2<=z<=5. Коварство этой неверной формулы в том, что Excel ничего не сообщает о ее некорректности.

Пример 10. В ячейке D2 (с именем z) записано число 3. Выяснить, принадлежит ли оно одному из лучей на числовой оси: $(-\infty, 2)$ или $(5, \infty)$.

Решение.

Условие $z\in (-\infty, 2) \cup (5,\infty)$ выполнено тогда, когда выполнено одно из условий $z < 2$ или $z > 5$. В ячейке D4 разместим формулу: =ИЛИ(z<2; z>5). Формула возвращает ЛОЖЬ.

Пример 11. В ячейку D5 ввести формулу, возвращающую значение ИСТИНА, если $z\in (-2, 4] \cup [7, 12) \cup [20,\infty)$, и ЛОЖЬ в противном случае.

Решение.

Вводим в D5 формулу: =ИЛИ(И(z >–2; z <=4); И(z >=7; z <12); z >=20).

Можно убедиться на примерах, что в логических выражениях число 1 ведет себя как ИСТИНА, а число 0 как ЛОЖЬ.

Пример 12. Построить таблицу истинности для функции двух аргументов $\bar{x} \cup y$. Аргументам придавать значения 1 и 0.

Решение приведено на рисунке. Формула для заданной функции имеет вид: =ИЛИ(НЕ(x); y). Вводим формулу сначала в C2, а затем копируем вниз.

	A	B	C
1	x	y	$\bar{x} \cup y$
2	0	0	=ИЛИ(НЕ(A2);B2)
3	0	1	=ИЛИ(НЕ(A3);B3)
4	1	0	=ИЛИ(НЕ(A4);B4)
5	1	1	=ИЛИ(НЕ(A5);B5)

x	y	$x \Rightarrow y$
0	0	ИСТИНА
0	1	ИСТИНА
1	0	ЛОЖЬ
1	1	ИСТИНА

Рассмотренная функция (операция) в математической логике имеет специальное название – *импликация* (логическое следование) и обозначается так $x \Rightarrow y$. Таблица истинности для импликации приведена на рисунке. В дальнейшем обозначение $x \Rightarrow y$ надо понимать как сокращение для $\bar{x} \cup y$.Из таблицы видно, что логическое следование ложно только тогда, когда из ИСТИНЫ следует ЛОЖЬ.

Импликация выполняется в последнюю очередь после отрицания, логического умножения и логического сложения. Напомним, что если формула содержит скобки, действие в скобках выполняются в первую очередь. Так, следующие две формулы задают разные функции:

$$(x \cup y) \cap z$$
$$x \cup y \cap z$$

Пример 13. Построить таблицу истинности для функции трех аргументов $x \Rightarrow y \cap z$. Указать количество наборов аргументов, при которых функция принимает значение ЛОЖЬ.
Решение. Всего количество различных наборов значений из трех аргументов равно $2^3=8$.

	A	B	C	D
1	x	y	z	$x \Rightarrow y \cap z$
2	0	0	0	=ИЛИ(НЕ(A2);И(B2;C2))
3	0	0	1	
4	0	1	0	
5	0	1	1	
6	1	0	0	
7	1	0	1	
8	1	1	0	
9	1	1	1	

Так как $x \Rightarrow y \cap z = \bar{x} \bigcup (y \cap z)$, вводим в D2 формулу: =ИЛИ(НЕ(*x*); И(*y*; *z*)) и затем копируем вниз.
Функция $x \Rightarrow y \cap z$ принимает значение ЛОЖЬ в трех случаях.

Пример 14. Решить логическое уравнение $\bar{x} \cup yz \cup \bar{y}$ =ЛОЖЬ.
Решение. Вводим в D2 формулу: =ИЛИ(НЕ(A2);И(B2;C2);НЕ(B2)) и копируем ее вниз

	A	B	C	D
1	x	y	z	$\bar{x} \cup yz \cup \bar{y}$
2	0	0	0	истина
3	0	0	1	истина
4	0	1	0	истина
5	0	1	1	истина
6	1	0	0	истина
7	1	0	1	истина
8	1	1	0	ложь
9	1	1	1	истина

Ответ: уравнение имеет единственное решение x=1, y=1, z=0.

Пример 15. Решить систему логических уравнений $\begin{cases} x \cup \bar{y} = истина \\ (x \cup y) \cap x = ложь \end{cases}$.

Решение. Заполним таблицы истинности, как показано на рисунке. В колонку E вводим функцию – индикатор, которая принимает значение ИСТИНА, когда выполнены условия системы. Итак, нашей системе удовлетворяет только первая строка таблицы.

	A	B	C	D	E
1	x	y	$x \cup \bar{y}$	$(x \cup y) \cap y$	
2	0	0	ИЛИ(A2; НЕ(B2))	И(ИЛИ(A2; B2); B2)	И(C2=ИСТИНА; D2=ЛОЖЬ)
3	0	1			
4	1	0			
5	1	1			

Ответ: *x*=0, *y*=0.
На практике “в чистом виде” логические выражения, как правило, не используются. Чаще всего они служат первым аргументом функции ЕСЛИ (см. далее).

Для логических переменных A, B, C и констант 1(истина), 0(ложь) справедливы следующие формулы (логическое умножение обозначаем точкой, логическое сложение обозначаем плюсом)

$$A \cdot \overline{A} = 0$$
$$A + 1 = 1$$
$$A + \overline{A} = 1$$
$$A \cdot A = A$$
$$A + A = A$$
$$(A + B) \cdot C = AB + CD$$
$$\overline{AB} = \overline{A} + \overline{B}$$
$$\overline{(A + B)} = \overline{A} \cdot \overline{B}$$

С помощью этих формул можно упрощать логические выражения и тем самым облегчать решение уравнений и систем.

Пример 16. Решить логическое уравнение

$$(x \cup xy \cup xz) \cap (y \cup z) = \bar{x} \cup x\overline{y}$$

Решение. Перепишем уравнение, используя знаки «плюс» и «точка»

$$(x + xy + xz) \cdot (y + z) = \bar{x} + x\overline{y}$$

Раскроем скобки и упростим левую часть

$$xy + xyy + xzy + xz + xyz + xzz =$$
$$xy + xyz + xz =$$
$$xy(1 + z) + xz =$$
$$xy + xz = x(y + z)$$

Упрощенный вид исходного уравнения таков:

$$x(y + z) = \bar{x} + x\overline{y}$$

Заполняем таблицу истинности для левой части уравнения

=И(x; ИЛИ(y; z))

и для правой части

=ИЛИ(НЕ(x); И(x; НЕ(y)).

Значения функций совпадают только для набора x=1, y=0, z=1 (и равны ИСТИНЕ).
Ответ: уравнение имеет единственное решение (1, 0, 1)

§ 2. Последовательности и суммы

2.1. Числовые последовательности данных

Числовой последовательностью называют числовую функцию, определенную на множестве натуральных чисел. Члены последовательности обозначаются буквами, снабженными индексами: $f(1) = a_1$, $f(2) = a_2$, …, $f(i)=a_i$. Числовая последовательность обозначается $\{a_i\}$, символ a_i обозначает общий или i-й член последовательности. Последовательность может задаваться **непосредственно** перечислением всех членов или **аналитически**. При аналитическом способе задания последовательности указывается формула, которая позволяет вычислить a_i по номеру i.

Для приведенных ниже последовательностей справа указаны формулы их общих членов:

1 , 2 , 3 , 4 , …	$a_i = i$ (ряд натуральных чисел);
1 , 1/2 , 1/4 , 1/8, …	$a_i = \frac{1}{2^{i-1}}$;
1 , –1 , 1 , –1 , …	$a_i = (-1)^{i-1}$;
2 , 3/2 , 4/3 , 5/4 , …	$a_i = \frac{i+1}{i}$;
1 , 4 , 9 , 16 , …	$a_i = i^2$.

Нередко последовательность задают **рекуррентно**, т.е. первые один или два члена задаются непосредственно, а последующие вычисляются через предыдущие по некоторой формуле, например:

$a_1 = 1$, $a_2 = 3$, $a_i = a_{i-2} + 2a_{i-1}$ для i =3, 4, …

Для приведенных ниже рекуррентных формул справа в скобках указаны несколько первых членов соответствующих последовательностей.

Факториалы:

$a_1 = 1$, $a_{i+1} = i\ a_i$. (1, 2, 6, 24, 120, …).

Арифметическая прогрессия с разностью d:

$a_1 = a$, $a_{i+1} = a_i + d$ (a, $a+d$, $a+2d$,…).

Геометрическая прогрессия со знаменателем q:

$b_1 = b$, $b_i = b_{i-1}q$ (b, bq, bq^2,…).

2.2. Построение арифметической прогрессии

Простейшей последовательностью является арифметическая прогрессия, которая чаще всего используется для нумерации объектов или при табулировании.

Пример 17. Ввести в колонку, начиная с A1, числа от 1 до 100.

Решение.

Способ 1

1. Ввести в ячейку A1 первый член прогрессии 1. Не забыть завершить ввод нажатием клавиши ENTER.
2. Установить курсор снова в ячейку A1.
3. Реализовать цепочку: вкладка ГЛАВНАЯ, группа РЕДАКТИРОВАНИЕ, кнопка ЗАПОЛНИТЬ, команда ПРОГРЕССИЯ.
4. В диалоговом окне ПРОГРЕССИЯ задать следующие параметры:

тип– арифметическая, **расположение –** по столбцам, **шаг –** 1, **предельное значение –** 100.

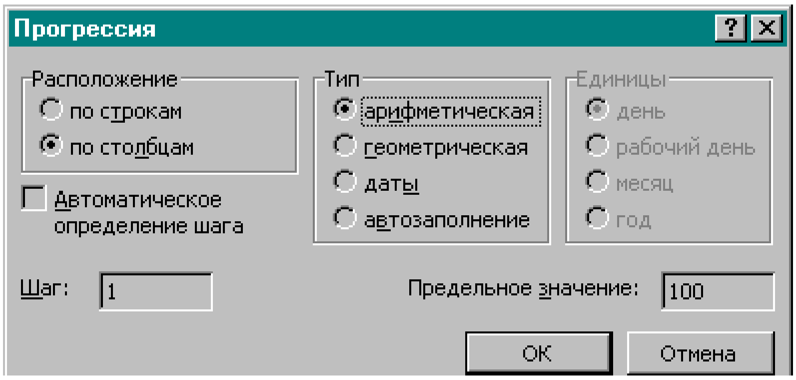


Рис. 2.2.1

Способ 2 (техника DRAG & DROP)

Ввести в A1 число 1. Ввести в A2 число 2. Замаркировать ячейки A1:A2. Протянуть левой кнопкой мыши маркер заполнения на нужное количество ячеек вниз.

Пример 18. Ввести в строку, начиная с A1, числа от –3 до 3.1 с шагом 0,1.

Решение.

Способ 1

1. Ввести в ячейку A1 первый член прогрессии –3. Не забыть завершить ввод, например, нажатием клавиши ENTER.
2. Выбрать вновь ячейку A1.
3. Реализовать цепочку: вкладка ГЛАВНАЯ, группа РЕДАКТИРОВАНИЕ, кнопка ЗАПОЛНИТЬ, команда ПРОГРЕССИЯ.

В диалоговом окне задать следующие параметры: *тип* – **арифметическая,** *расположение* – **по строкам,** *шаг* – **0,1,** *предельное значение* – **3,1.**

Способ 2

Ввести в A1 число –3. Ввести в B1 число –2,9. Замаркировать ячейки A1:B1. Протянуть левой кнопкой мыши маркер заполнения на нужное количество ячеек вправо.

2.3. Произвольные последовательности

Для получения последовательностей, заданных произвольными формулами, необходимо:

1. Ввести **вспомогательный столбец** натурального ряда (столбец аргументов).
2. Ввести формулу общего члена в первую ячейку столбца значений функции.
3. Скопировать или распространить формулу общего члена на нужное количество ячеек вниз.

Пример 19. Получить 10 членов последовательности, i-й элемент которой находится по формуле $a_i = i + \sin(i)$

Решение.

	A	B
1	Номер элемента i	Элемент a_i
2	1	=A2+SIN(A2)

1. Вводим в A1:B1 заголовки для столбцов данных. При вводе текста для перехода внутри ячейки на новую строку нажимаем ALT+ENTER.
2. В диапазон A2:A11 вводим числа от 1 до 10.
3. В ячейку B2 вводим формулу: =A2+SIN(A2) и завершаем ввод формулы клавишей ENTER.
4. Формулу из ячейки B2 копируем в B3:B11. Копирование можно осуществить двойным щелчком левой кнопкой мыши по маркеру заполнения, предварительно выделив ячейку B2. *Ответ:* $a_{10} = 9{,}46$.

Пример 20. Получить 10 элементов последовательности, задаваемой по правилу: первый элемент последовательности равен 10, а каждый последующий больше предыдущего на 5%.
Решение.
По условию $a_1 = 1$, а каждый элемент, начиная со второго, вычисляется по формуле $a_i = 1{,}05 \cdot a_{i-1}$, , i =2,3,…, 10.

	A	B
1	i	a_i
2	1	=10
3	2	=1,05*B2

1. Заполняем ячейки, как показано на рисунке.
2. Формулу из B3 копируем вниз.
3. Выделяем все заполненные ячейки (диапазон A1:B11). Для этого помещаем курсор внутрь этого диапазона и нажимаем комбинацию CTRL + * (звезда на цифровой клавиатуре справа). Таким способом выделяется заполненный данными прямоугольник (диапазон ячеек), внутри которого находится курсор.

Пример 21. Построить график 15-и членов рекуррентной последовательности $a_1 = 3$, $a_2 = 5$, $a_i = (a_{i-1} + 2\, a_{i-2} + i)/3$ при $i = 3, 4, \ldots, 15$. Найти a_{15}.

	A	B
1	i	a_i
2	1	=3
3	2	=5
4	3	=(B3+2*B2+A4)/3

Решение.
1. В диапазон A2:A16 вводим числа от 1 до 15.
2. В ячейку B2 вводим число 3.
3. В ячейку B3 вводим число 5.
4. В ячейку B4 вводим формулу: =(B3+2*B2+A4)/3.
5. Копируем формулу из ячейки B4 вниз.
6. Маркируем диапазон B1:B16 (CTRL + *на цифровой клавиатуре) и строим диаграмму типа ГИСТОГРАММА (рис. 2.3.1).

Ответ: a_{15}= 28,83.

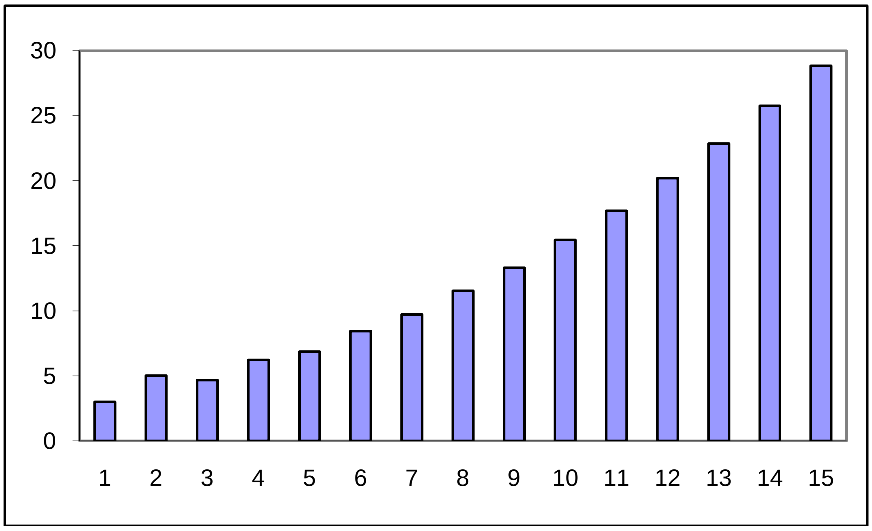


Рис. 2.3.1

Пример 22. Алгоритм извлечения корня квадратного**.** Присвойте ячейке A2 имя *a* и введите число 25. Постройте 20 членов рекуррентной последовательности, определяемой по формулам: $X_1 = 100$, $X_n=0,5(X_{n-1}+a/X_{n-1})$, $n = 2,3, \ldots$

	A	B	C
1	a	n	X_n
2	25	1	100
3		2	=0,5*(C2+*a*/C2)

*Решение***.**
Заполняем ячейки, как показано на рисунке. Формулу из C3 копируем вниз. Полученная последовательность сходится к квадратному корню из числа *a*, независимо от того, какое стартовое значение дать первому элементу X_1. Экспериментируем, меняя стартовое значение X_1. Вводим, например, 1000, 1, 10000. Меняем значение ячейки *a*, например, 81, 100, 625.

Пример 23. Первый элемент рекуррентной последовательности равен 3. Последующие элементы вычисляется по правилу: каждый равняется половине предыдущего, если тот больше 2, и в полтора раза больше предыдущего, если тот меньше или равен 2. Найти 20 элементов.

Решение. Имеем $X_1 = 3$, $X_n = \begin{cases} 0,5X_{n-1}, \textit{если } X_n > 2 \\ 1,5X_{n-1}, \textit{если } X_{n-1} <= 2 \end{cases}$, $n = 2,3, \ldots$

Заполняем ячейки как на рисунке.

	A	B
1	n	X_n
2	1	3
3	2	=ЕСЛИ(B2>2; 0,5*B2; 1,5*B2)
4	3	копируем вниз

Ответ: $X_{20} = 1,014$.

Пример 24.Получить 20 членов последовательности, заданной формулой

$$a_{n+1} = f(a_n), \text{ если } a_1 = 1,5 \text{ и}$$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3x+12}{6-x}, & x < 2 \\ 2\sin(0,1\pi x + 1,3\pi) - 2, & x \geq 2 \end{cases}$$

Найти сумму $a_{18} + a_{19} + a_{20}$.
Решение. Вводим в A1 и в B1 обозначения “*n*” и “a_n”;
Вводим с A2 по A21 номера элементов с 1–го по 20–й;
Вводим в B2 значение первого элемента 1,5;
Вводим в B3 формулу
=ЕСЛИ(B2<2; (3*B2+12)/(6-B2); 2*SIN(0,1*ПИ()*B2+1,3*ПИ()) -2)

и копируем вниз.

Ответ: $a_{18}= -4$, $a_{19}= 0$, $a_{20}= 2$.

Пример 25. Получить 20 членов последовательности, заданной формулой

$$a_i = \frac{1\cdot 5\cdot 9\cdot \ldots \cdot (4i-3)}{2\cdot 5\cdot 8\cdot \ldots \cdot (3i-1)},$$

т.е. числитель i-го элемента – произведение i членов арифметической прогрессии с шагом 4, а знаменатель – произведение i членов арифметической прогрессии с шагом 3.

Решение. Из формулы общего члена следует рекуррентное соотношение

$$a_1 = \frac{1}{2},\ a_i = a_{i-1}\cdot\frac{4i-3}{3i-1},\ i = 2, 3, \ldots$$

В диапазон A1:A20 вводим числа от 1 до 20. В ячейку B1 вводим число 0,5. В ячейку B2 вводим формулу: =B1*(4*A2–3)/(3*A2–1). Формулу из B2 копируем в диапазон B3:B20.

Ответ: a_{20}= 33,83.

Пример 26. В курсе математики доказывается, что последовательность, заданная формулой $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, сходится к числу e = 2,718281828… Построить эту последовательность и указать номер, начиная с которого элементы отличаются от числа e меньше, чем на 0,05.

	A	B	C
1	n	a_n	$e - a_n$
2	1	=(1+1/A2)^A2	=EXP(1) – B2
3	2	Копируем вниз	Копируем вниз

Решение.
1. Заполняем ячейки как показано на рисунке.
2. Формулы из B2, C2 копируем вниз.

Ответ: начиная с 27-го номера элементы последовательности отличаются от числа e меньше, чем на 0,05.

Пример 27. Можно показать, что рекуррентная последовательность, задаваемая правилом a_1= 4 и $a_n = a_{n-1} + (-1)^{n+1}\cdot\frac{4}{2n-1}$ для n = 2, 3,…, сходится к числу π. Построить эту последовательность и указать номер, начиная с которого элементы отличаются от числа π меньше, чем на 2%.

Решение.
1. Заполняем ячейки, как показано на рисунке.
2. Формулы из B3 и C2 копируем вниз.

	A	B	C
1	n	a_n	$(\pi - a_n)/\pi$
2	1	=4	=ABS(ПИ()–B2)/ПИ()
3	2	=B2+(–1)^(A3+1)*4/(2*A3–1)	Копируем вниз

Ответ: начиная с 17-го номера, элементы последовательности отличаются от числа π меньше, чем на 2%.

Пример 28. Задача начала XIII века Леонарда Пизанского (Фибоначчи). Известно, что пара взрослых кроликов приносит приплод из двух крольчат, самки и самца, раз в месяц, а новорожденные кролики становятся взрослыми через два месяца и уже могут приносить аналогичный приплод. Предполагается, что в первый месяц имелась одна пара новорожденных кроликов. Обозначим $Ф_n$ количество пар кроликов , которое получится в результате такого размножения к концу *n*-го месяца (предполагается, что кролики живут неограниченно долго). Построить последовательность $Ф_n$ и найти число, к которому стремится отношение $Ф_{n+1}/Ф_n$ при увеличении *n*.
Проверить справедливость формулы Бине:

$$\Phi_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n .$$

Решение.

	A	B	C	D
1	*n*	Φ_n по рекуррентной формуле	Φ_{n+1}/Φ_n	Φ_n по формуле Бине
2	1	=1		=1/5^0,5*((1+5^0,5)/2)^A2–1/5^0,5*((1–5^0,5)/2)^A2
3	2	=1	=B3/B2	Копируем вниз
4	3	=B3+B2	Копируем вниз	
5		Копируем вниз		

Рис. 2.3.2

Очевидно, что $Ф_1 = 1$, $Ф_2 = 1$. Далее, прирост числа пар за (*n*+2)-й месяц равен числу пар, имеющихся к концу *n*-го месяца $Ф_{n+2} – Ф_{n+1} = Ф_n$ (приплод за (*n*+1)-й месяц еще не успел созреть). Отсюда получаем рекуррентную формулу $Ф_{n+2} = Ф_{n+1} + Ф_n$ для $n+2 = 3, 4, \ldots$

Заполняем ячейки, как показано на рис. 2.3.2. Копируем формулы из ячеек B4, C3 и D2 вниз.

Ответ: последовательность чисел Фибоначчи: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, … Отношение соседних членов стремится к числу $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ≈1,62. Это число связано с так называемым золотым сечением (пропорцией), которое часто используется в математике, архитектуре, психологии.

2.4. Операция суммирования. Функция СУММ

Пусть дана последовательность $\{a_i\}$. Сумма первых, например, десяти членов этой последовательности обозначается $\sum_{i=1}^{10} a_i$. Таким образом,

$$\sum_{i=1}^{10} a_i = a_1 + a_2 + ... + a_{10}.$$

Для получения суммы на EXCEL нужно заполнить столбец для a_i, а затем воспользоваться функцией СУММ.

Пример 29. Найти сумму $\sum_{i=1}^{25} \ln(1+i)$.

Решение.

В этом примере формула общего члена имеет вид $a_i = ln(1+i)$. В диапазон A1:A25 вводим числа от 1 до 25. В ячейку B1 вводим формулу: =LN(1+A1). Копируем формулу из B1 вниз до 25-й строки. Далее:

Способ 1

Переходим в ячейку B26 и два раза щелкаем по значку АВТОСУММИРОВАНИЕ.

Способ 2

Переходим в ячейку C1, один раз щелкаем по значку АВТОСУММИРОВАНИЕ и в появившуюся формулу вместо A1:B1 вводим нужный диапазон B1:B25.

Способ 3

Вводим в D1 с клавиатуры формулу: =СУММ(B1:B25).

Ответ: 61,26.

Пример 30. Найти и расположить в ячейке D1 сумму $\sum_{i=1}^{30} \frac{(x+3)^{2i}}{(2i+1)}$, где x размещается в ячейке C1 и равен –1,9.

Решение.

1. Вводим в C1 число –1,9.
2. В диапазон A1:A30 вводим числа от 1 до 30.
3. В ячейку B1 ввести формулу: =($C$1+3)^(2*A1)/(2*A1+1).

Для правильного последующего копирования надо использовать **абсолютный адрес для ячейки C1**. Для смены типа ссылки с относительной на абсолютную при вводе адреса ячейки (курсор внутри или рядом с адресом) нажмите клавишу F4.

4. Формулу из ячейки B1 скопировать в диапазон B2:B30.
5. В ячейку D1 ввести формулу: =СУММ(B1:B30).

Ответ: сумма равна 36,76.

Пример 31. Найти сумму 10 первых членов последовательности с формулой общего члена $a_i = \frac{i}{10^i + 1}$.

Решение.

1. В диапазон A1:A10 вводим числа от 1 до 10.
2. В ячейку B1 вводим формулу: =A1/(10^A1+1).
3. Формулу ячейки B1 копируем вниз до B10.
4. В ячейку C1 вводим формулу: =СУММ(B1:B10).

Ответ: 0,11.

2.5. Операция произведения. Функция ПРОИЗВЕД

Произведение первых, например, 7 членов последовательности a_i обозначается так: $\prod_{i=1}^{7} a_i$. Таким образом, $\prod_{i=1}^{7} a_i = a_1\ a_2 \ldots a_7$. Если числа a_i введены непосредственно, например, в диапазон F1:F7, то произведение находится сразу по формуле: =ПРОИЗВЕД(F1:F7). В других случаях произведение удобно получать рекуррентно: $\prod_{i=1}^{1} a_i = a_1$, $\prod_{i=1}^{n+1} a_i = a_{n+1} \cdot \prod_{i=1}^{n} a_i$.

Пример 32. Найти произведение натуральных чисел от 1 до 15. Обозначается как 15! и читается «пятнадцать факториал». Сравнить со значением, полученным по формуле Стирлинга для приближенного вычисления факториалов:

$$n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\left(1+\frac{1}{12n}\right).$$

Решение.

По определению факториала имеем: 15! = $\prod_{i=1}^{15} i$.

Способ 1

Вводим в диапазон A1:A15 числа от 1 до 15. Вводим в F1 формулу: =ПРОИЗВЕД(A1:A15).

Способ 2 (рекуррентный)

Вводим в A1:A15 числа от 1 до 15. Вводим в B1 число 1. Вводим в B2 формулу: =B1*A2. Формулу из B2 копируем вниз до B15. Ячейка B15 содержит 15!

Способ 3

Вводим в F2 функцию ФАКТР(15).

Ответ: 15! = 1 307 674 368 000. По формуле Стирлинга 15! ≈ 1 307 655 337 323.

Пример 33. Найти произведение $\prod_{i=1}^{30}\left[1-\left(\frac{x}{3i}\right)^2\right]$, если x находится в ячейке F1 и равен 2.

Решение.

Вводим в F1 число 2. Вводим в A1:A30 числа от 1 до 30. Вводим в B1 формулу: =1–($F$1/3/A1)^2. Формулу из B1 копируем в B2:B30. Далее:

Способ 1

Вводим в D1формулу: =ПРОИЗВЕД(B1:B30).

Способ 2 (рекуррентный)

Вводим в C1 формулу: =B1. Вводим в C2 формулу: =C1*B2. Формулу из C2 копируем в диапазон C3:C30. Ячейка C30 содержит искомое произведение.

Ответ: 0,42.

2.6. Комбинаторные формулы. Функция ЧИСЛКОМБ

С функцией *факториал* тесно связаны комбинаторные формулы, которые применяются при нахождении числа перестановок, числа размещений и числа сочетаний (комбинаций) заданного множества объектов. Общеупотребительны следующие обозначения:

P_n – число перестановок n объектов по n местам;

A_n^m– число размещений n объектов на m местах ($m \le n$);

C_n^m– число выборов (комбинаций) m объектов из n объектов ($m \le n$).

Формулы для расчета:

$$P_n = n!$$

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$$

$$C_n^m = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}$$

Число комбинаций в EXCEL можно также найти, используя встроенную функцию ЧИСЛКОМБ(n; m). Для числа размещений можно использовать ЧИСЛКОМБ(n; m)*ФАКТР(m).

Пример 34. Сколькими способами можно рассадить 7 человек на 7 имеющихся мест?

Решение. Размещаем на 7 мест семь человек (P_7):

=ФАКТР(7).

Ответ: 5040.

Пример 35. Сколькими способами можно сформировать комиссию, состоящую из председателя, заместителя и секретаря из 10 имеющихся кандидатов?

Решение. Размещаем на три имеющихся места троих из десяти кандидатов (A_{10}^3):

=ФАКТР(10)/ФАКТР(7) или

=ЧИСЛКОМБ(10; 3)*ФАКТР(3)

Ответ: 720.

Пример 36. Имеется 10 различных роз. Сколькими способами можно выбрать 5 роз для букета?

Решение. Число комбинаций по 5 роз, выбранных из имеющихся 10 (C_{10}^5):

=ЧИСЛКОМБ(10; 5).

Ответ: 252.

2.7.Среднее геометрическое. Функция СРГЕОМ

Пусть даны числа a, b, c. Средним геометрическим трех чисел называется корень третьей степени из их произведения $\sqrt[3]{abc}$. Средним геометрическим n чисел называется корень n -й степени из их произведения.

Если дано n членов последовательности $\{a_i\}$, то средним геометрическим этих членов называется величина $\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i}$. Для вычисления среднего геометрического используется функция СРГЕОМ.

Пример 37. Найти среднее геометрическое чисел 2, 4, 8.

Решение.

Вводим в любую ячейку формулу: =СРГЕОМ(2; 4; 8).

Ответ: 4.

Пример 38. Найти среднее геометрическое 10 членов последовательности

$$a_i = 1 + i.$$

Решение.
Вводим в диапазон A1:A10 числа от 1 до 10. Вводим в B1 формулу: =1+A1. Копируем формулу вниз. Далее:

Способ 1

Вводим в C1 формулу: =СРГЕОМ(B1:B10).

Способ 2 (без использования функции СРГЕОМ)

Вводим в D1 формулу: =ПРОИЗВЕД(B1:B10)^(1/10).

Ответ: 5,76.

2.8. Суммирование произведений. Функция СУММПРОИЗВ

Пример 39. Найти и расположить в ячейках D1, D2 и D3 суммы $\sum_{i=1}^{9} x_i y_i$, $\sum_{i=1}^{9} x_i^2$, $\sum_{i=1}^{9} x_i^2 y_i^3$, где $x_i = 1+cos(i)$ и размещены в диапазоне B1: B9, $y_i = 1+sin(i)$ и находятся в диапазоне C1: C9.

Решение.

1. Вводим в A1:A9 числа от 1 до 9.
2. Вводим в B1 формулу: =1+COS(A1) и в C1 формулу: =1+SIN(A1).
3. Копируем формулы из B1:C1 вниз.
4. Вводим в D1 формулу: =СУММПРОИЗВ(B1:B9; C1:C9).
5. Вводим в D2 =СУММПРОИЗВ(B1:B9; B1:B9).
6. Вводим в D3: =СУММПРОИЗВ(B1:B9; B1:B9; C1:C9; C1:C9; C1:C9).

Ответ: 10,24; 12,14; 38,39.

2.9. Операция усреднения. Функция СРЗНАЧ

Пусть дано n чисел x_i. Среднее арифметическое значение этих чисел вычисляется по формуле: $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$. Для вычисления средних значений в EXCEL используется функция **СРЗНАЧ** и, возможно, **столбец промежуточных результатов**. Другим способом вычисления средних является непосредственное суммирование с последующим делением на число слагаемых.

Пример 40. Даны два списка чисел $x_i \in$ B1:B10 и $y_i \in$ C1:C10, причем $x_i = i^2$, $y_i = cos(i)$. Требуется найти среднее значение произведения

$$\overline{XY} = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} x_i y_i .$$

Решение.
Вводим в A1:A10 числа 1,2,…,10. Вводим в B1 формулу: =A1^2. Копируем формулу из B1 вниз до B10. Вводим в C1 формулу: =COS(A1). Копируем формулу из C1 вниз до C10. Далее:

Способ 1

В ячейку D1 вводим формулу: =B1*C1. Формулу из D1 копируем в столбец промежуточных результатов D2:D10. В ячейку F1 вводим формулу: =СРЗНАЧ(D1:D10).

Способ 2

В ячейку D1 вводим формулу: =СУММПРОИЗВ(B1:B10; C1:C10)/10.

Ответ: –10,89.

Пример 41. Для списка из предыдущего примера найти среднее значение квадратов: $\overline{X^2} = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} x_i^2$.

Решение.

1. В ячейку D2 вводим формулу: =СУММПРОИЗВ(B1:B10; B1:B10)/10.

Ответ: 2533,30.

Пример 42. Для списков из предыдущего примера найти

$$\overline{X^2Y^3} = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} x_i^2 y_i^3 .$$

В ячейку D3 вводим формулу: =СУММПРОИЗВ(B1:B10; B1:B10; C1:C10; C1:C10; C1:C10)/10.

Ответ: –884,34.

Пример 43. Для списков, заданных аналитически $x_i = \frac{1}{i+1}$, i =1, 2,…,17, и y_1 = 25, $y_i = y_{i-1}$ Sin($y_{i-1}+i$), i=2, 3, …, 17, найти среднее значение произведения $\overline{XY}$.

Решение.

Способ 1

1. Вводим в столбец A номера элементов. Вводим в B1 формулу: =1/(A1+1).
2. Формулу ячейки B1 копируем в B2:B17 (столбец значений X).
3. Вводим в C1 число 25 (значение для y_1).
4. Вводим в C2 формулу: =C1*SIN(C1+A2).
5. Формулу ячейки C2 копируем в диапазон C3:C17 (столбец значений Y).
6. В ячейку D1 вводим формулу: =B1*C1.
7. Формулу ячейки D1 копируем в диапазон D2:D17 (столбец произведений x_iy_i).
8. В ячейку F1 вводим формулу: =СРЗНАЧ(D1:D17).

Способ 2

Первые 5 пунктов такие же, как в первом способе.

6. В ячейку F1 вводим формулу: =СУММПРОИЗВ(B1:B17; C1:C17)/17.

Ответ: 1,94.

§ 3. Матрицы

3.1. Формирование матриц

Матрицей называют прямоугольную таблицу чисел. Обычно матрицы обозначают большими полужирными латинскими буквами, например, **A**, **D**, **F**. Если матрица состоит, например, из 6 строк и 7 столбцов, то говорят, что она имеет размерность 6 на 7 и пишут (6×7). Элемент матрицы **A**, расположенный, например, в 3-й строке и в 5-м столбце, обозначается так: a_{35}. В общем случае a_{ij} – это элемент матрицы **A**, расположенный в i-й строке и j-м столбце. Элементы матрицы могут задаваться непосредственно и могут вычисляться по формулам, как функции своих индексов (номеров строк и столбцов).

Пример 44. Сформировать матрицу размерности 4×4 с элементами, которые определяются по формуле: $a_{ij}= i^2+j^3$.

Решение.

Вводим в A2:A5 номера строк (индекс i). Вводим в B1:E1 номера столбцов (индекс j). Вводим в B2 формулу: =$A2^2+B$1^3.

	A	B	C	D	E
1	*i/j*	1	2	3	4
2	1	=$A2^2+B$1^3	Копируем вправо		
3	2	Копируем вниз			

Рис. 3.1.1

Так как номера строк и столбцов расположены в столбце A и строке 1 соответственно и не должны изменяться при копировании, обращение к **столбцу A и строке 1 делаем абсолютными (**смешанные ссылки**)**. Смена типа ссылки производится при вводе адреса ячейки нажатием клавиши F4 нужное число раз. Для превращения {B1} в {B$1} нажимаем клавишу F4 два раза, для превращения {A2} в {$A2} – F4 три раза. Копируем формулу из B2 вниз и вправо. Требуемая матрица находится в диапазоне ячеек B2:E5 (рис. 3.1.2).

	A	B	C	D	E
1	*i/j*	1	2	3	4
2	1	2	9	28	65
3	2	5	12	31	68
4	3	10	17	36	73
5	4	17	24	43	80

Рис. 3.1.2

Пример 45. Получить матрицу **A** размерности 5×5, первая строка которой задается формулой:

$$a_{1j} = 2j + 3,$$

вторая строка задается формулой:

$$a_{2j} = j - \frac{3}{2+1/j},$$

а каждая следующая есть сумма двух предыдущих.
Способ 1
Вводим в A2:A6 номера строк (рис.3.1.3). Вводим в B1:F1 номера столбцов. Вводим в B2 формулу: =2*B1+3. Вводим в B3 =B1–3/(2+(1/B1)). Маркируем ячейки B2:B3 и копируем формулы вправо до F-столбца. Вводим в B4 формулу: =B3+B2. Копируем формулу ячейки B4 вниз до B6. Маркируем ячейки B4:B6 и копируем формулы вправо до F-столбца.

	A	B	C	D	E	F
1	*i/j*	1	2	3	4	5
2	1	5	7	9	13	13
3	2	0	0,8	1,7	2,7	3,6
4	3	5	7,8	10,7	13,7	16,6
5	4	5	8,6	12,4	16,3	20,3
6	5	10	16,4	23,1	30	36,9

Рис. 3.1.3

Способ 2
Присвоим столбцу А имя *I* (маркируем А-столбец, открываем левым шелчком поле имени, вводим с клавиатуры *I*, нажимаем ENTER). Присвоим первой строке имя *J* (маркируем 1-ю строку и т.д.). Заполняем таблицу, как на рисунке. Вводим в B2 нужную формулу. Снова переходим в ячейку B2. Нажимаем клавиши CTRL+SHIFT+END. В результате маркируется диапазон B2:F6. Последовательно нажимаем клавиши CTRL+D (копирование вниз) и CTRL +R (копирование вправо).

	A	B	C	D	E	F
1	*i/j*	1	2	3	4	5
2	1	2*J+3				
3	2	J–3/(2+1/J)				

3.2. Нахождение наибольших и наименьших чисел из заданных списков. Функции МАКС, МИН

Как правило, списки чисел задаются в виде матриц (диапазонов ячеек). Будем использовать следующие обозначения: *MAX*(**A**) максимальное значение из элементов матрицы **A**; $\underset{j}{Max}\, a_{1j}$ −максимальное значение из элементов 1-й строки матрицы; $\underset{i}{Max}\,\underset{j}{Min}\, a_{ij}$ −в каждой **строке** матрицы находится наименьшее число и из найденных чисел выбирается наибольшее (первой выполняется внутренняя функция *Min*); $\underset{j}{Max}\,\underset{i}{Min}\, a_{ij}$ −в каждом **столбце** матрицы находится наименьшее число и из найденных чисел выбирается наибольшее.

При использовании функций МИН и МАКС в качестве аргументов используются обозначения диапазонов ячеек, например: =МАКС(B2:F6). Если диапазону присвоить пользовательское имя, например, «MATR», то можно ввести формулу: =МАКС(MATR).

Пример 46. Найти наибольшее значение из наименьших значений произвольно сформированных матрицы **A** (диапазон A1:C4) и матрицы **B** (диапазон F1:H5).
Решение.
1. Водим формулу: =МАКС(МИН(A1:C4); МИН(F1:H5)).

Пример 47. Для матрицы **A** размерности 10×3 с общим элементом $a_{ij}=sin(1000 \cdot i \cdot j)$, расположенной в диапазоне B2:D11, построить столбец **S** в диапазоне E2:E11, который состоял бы из наибольших значений в строках матрицы **A**. Найти наименьший элемент столбца **S** и поместить его в ячейку E12. Другими словами, найти: $\underset{i}{Min}\,\underset{j}{Max}\,a_{ij}$.

Решение.
1. Вводим номера строк в A2:A11 и номера столбцов в B1:D1.
2. Вводим в B2 формулу =SIN(1000*$A2*B$1) и копируем ее в диапазон B2:D11.
3. Вводим в ячейку E2 формулу: =МАКС(B2:D2) и копируем ее вниз до E11.
4. Вводим в ячейку E12 формулу: =МИН(E2:E11).

Ответ: –0,43.

3.3. Сумма и разность матриц

Пример 48. В диапазоне A2:C3 расположена матрица **A**, в диапазоне E2:G3 – матрица **B** (рис. 3.3.1).
1) Найти матрицу C, равную разности **A - B**. Результат поместить в диапазон I2:K3.
2) Найти матрицу **D**, равную **A**+3**B**. Результат поместить в диапазон A5:C6.
Решение.
1) Маркируем место для результата – диапазон I2:K3. Активизируем строку формул. Вводим в строку формул формулу: =A2:C3–E2:G3. Знак “=” вводим с клавиатуры, а диапазоны – методом указания, обводя курсором нужные блоки ячеек. Завершаем ввод нажатием комбинации клавиш CTRL+SHIFT+ENTER.
2) Маркируем диапазон A5:C6 (место для результата).
Активизируем строку формул. Вводим в строку формул формулу: =A2:C3+3*E2:G3. Завершаем ввод нажатием комбинации клавиш CTRL+ SHIFT +ENTER.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	Матрица A				Матрица B				A–B		
2	9	6	3		3	3	3		6	3	0
3	8	5	2		3	3	3		5	2	–1
4	A–3B										

Рис. 3.3.1

3.4. Матричные функции

Произведение матриц, транспонирование матриц, нахождение обратных матриц и определителей реализуются с помощью функций МУМНОЖ, ТРАНСП, МОБР, МОПРЕД. При операциях с матрицами надо помнить, что произведение определено для согласованных матриц и обратная матрица определена только для квадратных матриц с ненулевым определителем.

Пример 49. Найти произведение матриц **AB**, где **A** имеет размерность 3×2 и находится в диапазоне A2:B4, **B** имеет размерность 2×4 и находится в диапазоне D2:G3

	A	B	C	D	E	F	G
1	Матрица A				Матрица B		
2	2	3		1	5	2	1
3	4	6		2	1	4	1
4	7	1					
5							
6	Произведение AB						
7	8	13	16	5			
8	16	26	32	10			
9	9	36	18	8			

Решение.
Результатом произведения будет матрица **C**, имеющая размерность 3×4. Разместим ее в диапазоне A7:D9.
1. Маркируем место для результата – диапазон A7:D9.
2. Щелкаем левой кнопкой мыши в строке формул.
3. Вводим в строку формул формулу: =МУМНОЖ(A2:B4; D2:G3).
4. Завершаем ввод нажатием комбинации CTRL+ SHIFT+ENTER.

	A	B	C
1	Матрица A		
2	2	3	
3	4	6	
4	7	1	
5			
6	Матрица AA^T		
7	13	26	17
8	26	52	34
9	17	34	50

Пример 50. Для матрицы **A** из предыдущего примера найти произведение $\mathbf{AA^T}$.
Решение.
Так как размерность матрицы **A** равна 3×2, то размерность матрицы $\mathbf{A^T}$ равна 2×3 и, следовательно, размерность матрицы $\mathbf{C}=\mathbf{AA^T}$ равна 3×3. Будем размещать **C** в диапазоне A7:C9.
1. Маркируем диапазон A7:C9 (место для результата).
2. Щелкаем левой кнопкой мыши в строке формул.
3. Вводим в строку формул формулу: =МУМНОЖ(A2:B4; ТРАНСП(A2:B4)).
4. Завершаем ввод нажатием комбинации клавиш CTRL+SHIFT+ENTER.

Пример 51. Для матрицы **A** из диапазона A2:C4 найти обратную матрицу $\mathbf{A^{-1}}$ и определители матриц $\mathbf{A^{-1}}$ и **A**.
Решение.
Будем размещать $\mathbf{A^{-1}}$ в диапазоне E2:G4 (рис. 3.4.3).

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Матрица A				Матрица A^{-1}			
2	1	5	3		0,038	0,615	–0,885	
3	3	4	7		0,308	–0,077	–0,077	
4	1	3	5		–0,192	–0,077	0,423	
5								
6	Det(A)				Det(A^{-1})		Det(A) Det(A^{-1})	
7	–26				–0,0385		1	

Рис. 3.4.3

1. Маркируем диапазон E2:G4 (место для результата).
2. Щелкаем левой кнопкой мыши в строке формул.

3. Вводим формулу: =МОБР(A2:C4).
4. Завершаем ввод нажатием комбинации клавиш CTRL+SHIFT+ENTER.
5. Вводим в ячейку A7 формулу для определителя матрицы **A**: =МОПРЕД(A2:C4).
6. Вводим в ячейку E7 формулу для определителя матрицы $\mathbf{A}^{-1}$ =МОПРЕД(E2:G4).
7. Вводим в G7 формулу для произведения определителей =A7*E7.

Обратим внимание на то, что произведение определителей исходной и обратной матриц равно единице, т.е. определители взаимно обратных матриц взаимно обратны.

Пример 52. Решить систему уравнений. Сделать проверку.

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 26 \\ 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 14 \\ 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 27 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 = 16 \end{cases}.$$

Решение.

В матричном виде система уравнений имеет вид **AX** = **B**, а ее решение (столбец неизвестных **X**) определяется по формуле $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$, где $\mathbf{A}^{-1}$ – обратная матрица для матрицы коэффициентов **A**, **B** – столбец свободных членов.

1. Вводим в диапазон A2:D5 (рис. 3.4.4) матрицу коэффициентов.
2. Вводим в диапазон F2:F5 столбец свободных членов.
3. Маркируем диапазон E2:E5 (место для результата).
4. Активизируем строку формул.
5. Вводим формулу: =МУМНОЖ(МОБР(A2:D5);F2:F5).
6. Завершаем ввод нажатием комбинации клавиш CTRL+ SHIFT+ENTER.
7. Маркируем диапазон G2:G5 (проверка найденного решения).
8. Активизируем строку формул.
9. Вводим формулу: =МУМНОЖ(A2:D5;E2:E5).
10. Завершаем ввод нажатием комбинации клавиш CTRL+SHIFT+ENTER.

Ответ: x_1=4, x_2=3, x_3=2, x_4=1.

	A	B	C	D	E	F	G
1	Матрица **A**				**X**	Столбец **B**	Проверка **AX**
2	4	1	3	1	4	26	26
3	3	–2	3	2	3	14	14
4	2	2	5	3	2	27	27
5	1	2	1	4	1	16	16

Рис. 3.4.4

3.5.Чувствительность матричных функций к изменению элементов матриц

Вопрос о том, как сильно меняется результат (значение функции) при малом изменении параметра (аргумента), играет важную роль в практических случаях применения математических моделей. Если малые изменения аргумента влекут за собой малые изменения функции, то говорят, что модель устойчива (малочувствительна) к малым изменениям аргумента (в частности, к погрешностям при определении значений аргумента). Устойчивость моделей увеличивает их надежность.

Далее будем изучать чувствительность в следующей постановке: на сколько процентов изменится результат, если аргумент изменить на заданное число процентов.

Пример 53.На сколько процентов изменится определитель

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 10 \end{vmatrix}$$

если элемент a_{22} уменьшить на 5%.

Решение.

Первоначальное значение определителя равно 20. Измененный определитель (с $a_{22} = 10\cdot 0{,}95 = 9{,}5$) $\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 9{,}5 \end{vmatrix}$ равен 18,5. Изменение составляет $\frac{18{,}5-20}{20} \cdot 100\%$ = – 7,50%.

Ответ: чувствительность определителя к 5% уменьшению элемента a_{22} равна – 7,50%.

Пример 54.Найти чувствительность определителя

$$\begin{vmatrix} -73 & 78 & 24 \\ 92 & 66 & 25 \\ -80 & 37 & 10 \end{vmatrix}$$

к 1% увеличению элемента a_{33}.

Решение.

Первоначальное значение определителя равно 1. Измененный определитель (с $a_{33} = 10\cdot 1{,}01 = 10{,}1$) равен – 1198,4.

Изменение составляет $\frac{-1198{,}4-1}{1} \cdot 100\%$ = – 119940%.

Ответ: чувствительность определителя к 1% увеличению элемента a_{33} равна – 119940%.

Пример 55. Обозначим u_{21} – элемент матрицы, обратной к матрице A. Найти чувствительность u_{21} к 10% увеличению элемента a_{11} матрицы A, если $A = \begin{pmatrix} 10 & 20 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$

Ответ: чувствительность равна $\frac{5-0{,}5}{0{,}5} \cdot 100\%$ = 900%

В примере 52 изменение функции соизмеримо с изменением аргумента. Примеры 53, 54 же показывают, что существуют такие комбинации элементов матриц, при которых матричные функции весьма чувствительны к малому изменению аргументов: малое возмущение на входе дает огромное возмущение на выходе.

§ 4. Функции

4.1. Табулирование функций

Табулирование функций – это вычисление значений функции в конечном числе точек, принадлежащих заданному отрезку (**отрезку табулирования**). Как правило, точки располагаются равноотстоящими друг от друга. В этом случае расстояние между ними называется **шагом** табулирования и обозначается Δx. Табулирование часто применяется для построения графиков функций.

Пример 56. Построить на отрезке [0 ; 3] с шагом 0,1 график функции

$y = ln(1+x^2)$.

Решение.

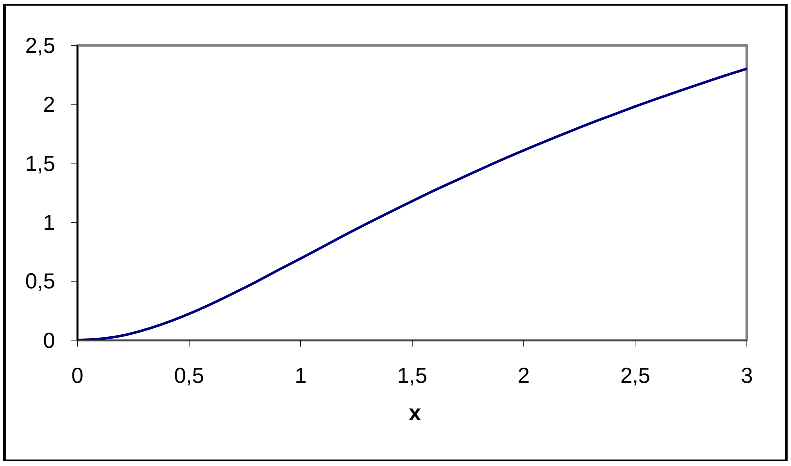


Рис. 4.1.1

1. В столбец A вводим пошаговые значения аргумента от 0 до 3 с шагом 0,1 одним из способов рассмотренных ранее.
2. В ячейку B1 вводим формулу: =LN(1+A1^2).
3. Копируем формулу из B1 вниз до B31.
4. Маркируем колонки A и B (комбинация CTRL+*на цифровой клавиатуре).
5. Строим диаграмму типа ТОЧЕЧНАЯ (рис. 4.1.1).

Пример 57. Протабулировать на отрезке [0 ; 3] функции $y_1 = e^x$ и $y_2 = 1 + x^3 sin(x)$. Построить их графики на одной диаграмме.

Решение. Положим шаг табулирования равным 0,2. Заполним таблицу, как показано на рис. 4.1.2.

	A	B	C	D
1	*x*	Y_1	Y_2	
2	0	=EXP(A2)	=1+A2^3*SIN(A2)	
3	0,2	Копируем вниз	Копируем вниз	

Рис. 4.1.2

Маркируем весь блок заполненных ячеек A1:C17 и строим диаграмму типа ТОЧЕЧНАЯ. Результат представлен на рис. 4.1.3

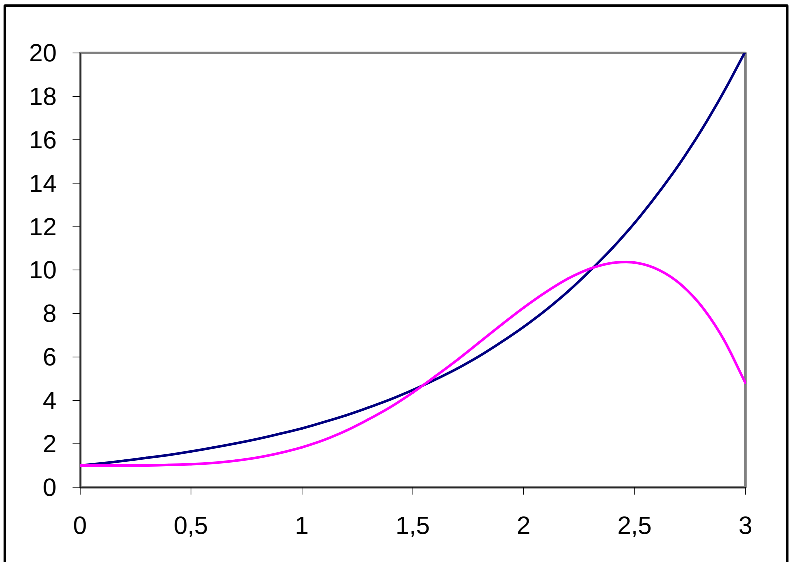


Рис. 4.1.3

4.2. Графики кусочно-непрерывных функций. Функция ЕСЛИ

Функция, задаваемая на разных участках оси OX различными формулами, называется кусочно-непрерывной. Например,

$$y = \begin{cases} 1 - x & при \quad x \le 1 \\ x^2 - 1 & при \quad x > 1 \end{cases}.$$

Для табулирования таких функций применяется функция
 ЕСЛИ(L; V1; V2), которая имеет три аргумента:
L – условие (равенство, неравенство),
V1 – значение, которое устанавливается, если L выполнено (истинно),
V2 – значение, которое устанавливается, если L не выполнено (ложно).
Например, значение функции ЕСЛИ(3>2 ; 5 ; 13) равно 5, так как неравенство 3 > 2 верно. Функция ЕСЛИ(2>=2 ; “УСПЕХ”; “НЕУДАЧА”) принимает текстовое значение “УСПЕХ”, так как неравенство 2>=2 верно.

Пример 58. Протабулировать приведенную выше функцию на отрезке
[–3; 2] с шагом Δx = 0,2 и построить ее график.
Решение. Заполняем таблицу, как на рисунке

	A	B	C
1	*x*	y	
2	–3	=ЕСЛИ(A2<=1; 1–A2; A2^2–1)	
3	–2,8	Копируем вниз	

Маркируем весь блок с данными (A1:B27) и строим диаграмму ТОЧЕЧНАЯ, подтип ЗНАЧЕНИЯ СОЕДИНЕНЫ ОТРЕЗКАМИ. Результат на рис. 4.2.1.

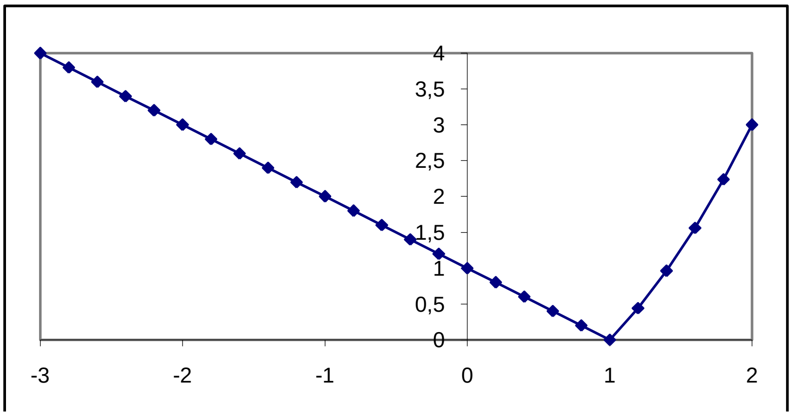


Рис. 4.2.1

Пример 59. Построить график функции $y = 1/x$ на отрезке [–1; 2] с шагом $\Delta x = 0{,}2$.
Решение.
Так как деление на нуль не имеет смысла, доопределим заданную функцию следующим образом

$$y = \begin{cases} 1/x & при \quad x \neq 0 \\ 0 & при \quad x = 0 \end{cases}.$$

1. Заполним таблицу
2.

	A	B	C
1	*x*	y	
2	–1	=ЕСЛИ(A2=0; 0; 1/A2)	
3	–0,8	Копируем вниз	

2. Маркируем блок A1:B17 и строим диаграмму типа ТОЧЕЧНАЯ (рис.4.2.2).

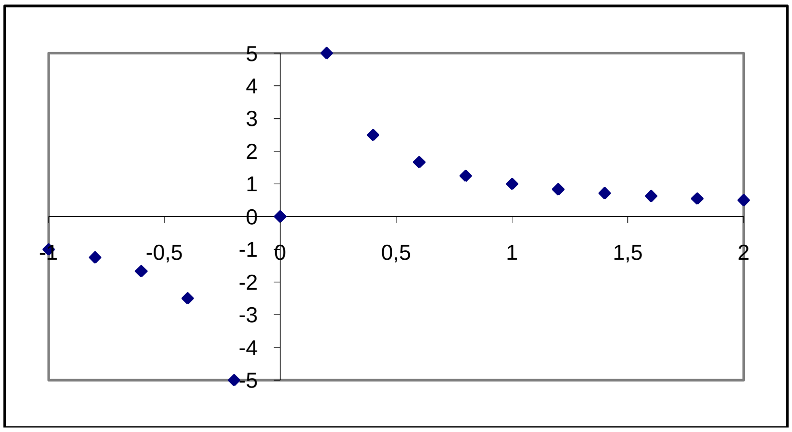


Рис. 4.2.2

Пример 60. На отрезке [–2; 2] с шагом $\Delta x = 0{,}2$ построить график функции

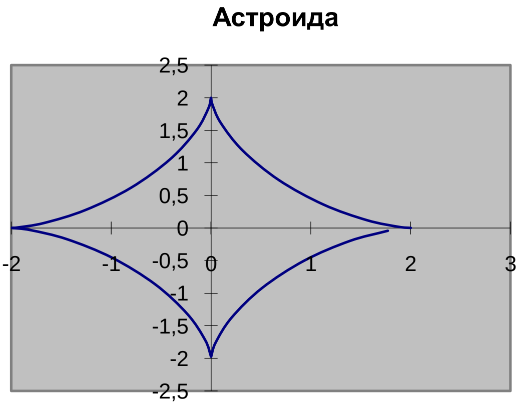
$$y = \begin{cases} 1/x & при \quad x < -1 \\ x^3 & при \quad -1 \leq x \leq 1. \\ 2 - x & при \quad x > 1 \end{cases}$$

Решение

Заполним столбец А, как показано ниже. Маркируем столбец А (левый шелчок по букве А) и выбераем команду ФОРМУЛЫ, ОПРЕДЕЛЕНИЕ ИМЕНИ, ДИСПЕТЧЕР ИМЕН. В диалоговом окне в поле ввода вводим с клавиатуры букву х. Теперь к ячейкам из столбца А можно обращаться по имени х . Формула для функции приведена на рисунке.

	A	B	C
1	*x*	y	
2	–2	=ЕСЛИ(*x* <–1; 1/*x*; ЕСЛИ(*x* <=1; *x*^3; 2–*x*))	
3	–1,8	Копируем вниз	

Маркируем весь диапазон с введенными данными комбинацией CTRL +* (звёздочка на цифровой клавиатуре) и строим диаграмму типа ТОЧЕЧНАЯ.



4.3. Построение графиков параметрически заданных зависимостей

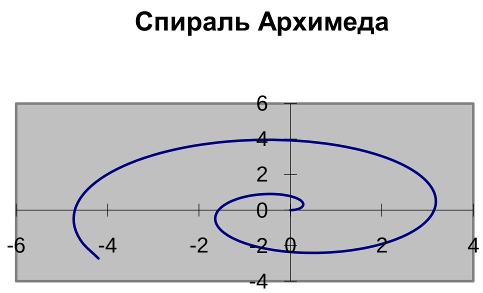
Пример 57. Построить график функции $y = f(x)$, если $x = 2\cos^3 t$, $y = 2\sin^3 t$ и промежуточный аргумент t изменяется на отрезке [0; 6] с шагом Δt = 0,2.

Решение.

1. Вводим в столбец А, начиная с ячейки А1, пошаговые значения аргумента *t*.
2. Вводим в В1 формулу: =2*COS(A1)^3.
3. Копируем формулу из В1 вниз в нужное количество ячеек (значения *x*).
4. Вводим в С1 формулу: =2*SIN(A1)^3.
5. Копируем формулу из С1 вниз в нужное количество ячеек (значения *y*).
6. Маркируем столбцы В и С и строим диаграмму типа ТОЧЕЧНАЯ.

Полученная кривая называется АСТРОИДОЙ.

Пример 61. Построить СПИРАЛЬ АРХИМЕДА по следующим данным: $x = r\cdot\cos(t)$, $y = r\cdot\sin(t)$, $r = 0{,}5\cdot t$, где t меняется на отрезке [0; 10] с шагом Δt=0,2.



Решение.

1. Вводим в столбец А, начиная с ячейки А1, пошаговые значения аргумента *t*.
2. Вводим в В1 формулу: =0,5*A1.
3. Копируем формулу из В1 вниз в нужное количество ячеек (значения *r*).
4. Вводим в С1 формулу: =B1*COS(A1).
5. Копируем формулу из С1 вниз в нужное количество ячеек (значения *x*).
6. Вводим в D1 формулу: =B1*SIN(A1).
7. Копируем формулу из D1 вниз в нужное количество ячеек (значения *y*).
8. Маркируем столбцы С и D и строим диаграмму типа ТОЧЕЧНАЯ.

4.4. Построение поверхностей

Пусть задана функция двух переменных $z = f(x,y)$. Для построения графика этой функции надо протабулировать ее на заданном прямоугольном множестве аргументов (x, y), а затем построить диаграмму типа ПОВЕРХНОСТЬ.

Пример 62. Протабулировать функцию двух переменных $z = x^2 – y^2$ на прямоугольнике $–3 <= x <= 3$, $–3 <= y <= 3$ с шагами $\Delta x=0,5$ и $\Delta y=0,5$. Построить график функции $z(x, y)$.

Решение.

1. Ячейку A1 оставляем пустой
2. Вводим в B1 {-3}, в C1 {-2,5} и т.д., вплоть до N1.

1		–3	–2,5	–2	–1,5	–1	–0,5	
2	–3	=B$1^2–$A2^2	=C$1^2–$A2^2					
3	–2,5	=B$1^2–$A3^2	=C$1^2–$A3^2					

3. В A2 вводим {–3}, в A3 вводим {–2,5} и т.д. вплоть до A14.
4. Вводим в B2 формулу: =B$1^2–$A2^2.

Так как номера строк и столбцов расположены в столбце A и строке 1 соответственно и не должны изменяться при копировании, обращение к столбцу A и строке 1 делаем абсолютными.

5. Копируем формулу из B2 вниз вправо вплоть до N14.
6. Маркируем весь диапазон данных A1:N14 (CTRL +*).
7. Строим диаграмму типа ПОВЕРХНОСТЬ (рис. 4.4.1).

Полученная поверхность называется гиперболическим параболоидом.

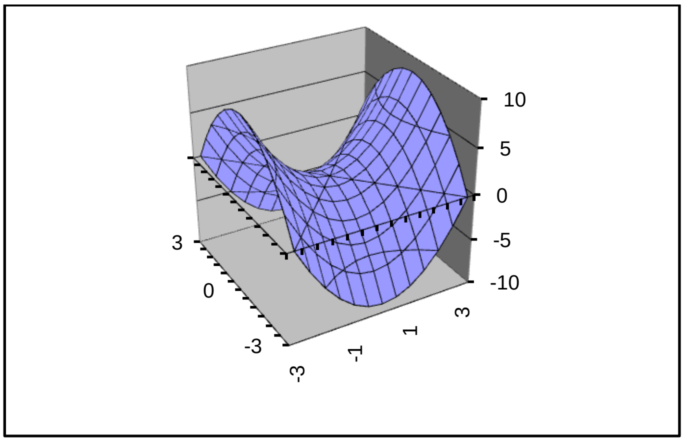
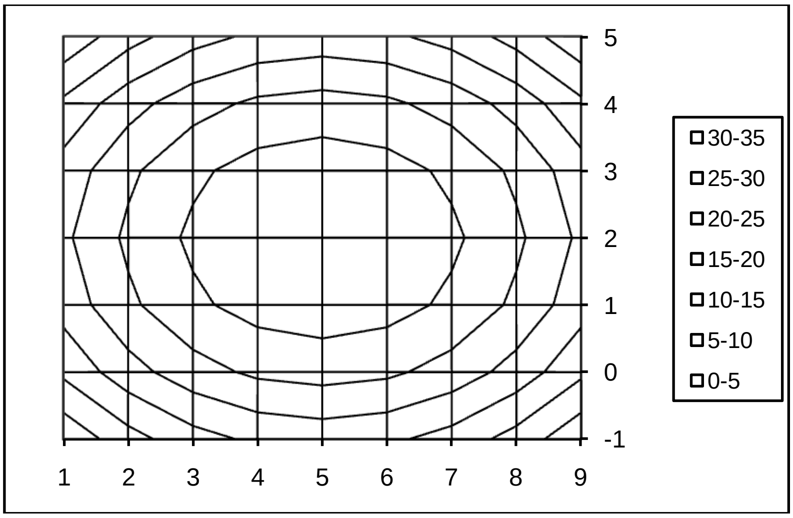


Рис. 4.4.1

Пример 63. Протабулировать функцию двух переменных $z = 2(x–2)^2+(y–5)^2$ на прямоугольнике $–1 <= x <= 5$, $1 <= y <= 9$ с шагами $\Delta x=1$ и $\Delta y=1$. Построить график линий постоянного значения $z(x, y) = const$.

Решение. Ячейка A1 оставляется пустой. В диапазон A2:A8 вводим пошаговые значения *x*. В диапазон B1:J1 вводим пошаговые значения *y*. Присваиваем столбцу A имя *x*. Присваиваем первой строке имя *y*. Вводим в B2 формулу: =2*(x–2)^2+(y–5)^2. Маркируем диапазон B2:J8 (CTRL+SHIFT+END). Копируем формулу вправо (CTRL+R) и вниз (CTRL+D). Маркируем весь диапазон данных (CTRL+*). Строим диаграмму типа ПОВЕРХНОСТЬ, подтип ПРОВОЛОЧНАЯ КОНТУРНАЯ.



§ 5. Производные и интегралы

5.1.Абсолютная и относительная погрешность

Пусть A – точное значение некоторой величины и A^* – приближенное значение (оценка) этой же величины. Общеупотребительны следующие формулы-понятия:

$|A - A^*|$ – абсолютная погрешность оценки;

$\left|\frac{A-A^*}{A}\right|$ – относительная погрешность оценки;

$\left|\frac{A-A^*}{A}\right| \cdot 100$ – относительная погрешность оценки в процентах.

В дальнейшем символы, обозначающие приближенные значения, будем снабжать звездочкой (*).

5.2. Приближенное вычисление производных

Пусть дифференцируемая функция $f(x)$ протабулирована на отрезке $[a, b]$ с шагом Δx. Обозначим

$x_0 = a,\ x_i = a + i\cdot\Delta x,\ f_i = f(x_i),\ i = 1, 2, \ldots, N$, где $N = (b - a)/\Delta x$ – число узлов табулирования.

При малых Δx для первой производной функции в точке x_i справедливо соотношение:

$$f_i' \approx \frac{f_i - f_{i-1}}{\Delta x},\ i = 1, 2, \ldots, N$$

Выражение

$$\frac{f_i - f_{i-1}}{\Delta x}$$

называется разностным аналогом «назад» для первой производной в точке $x_i = a + i\cdot\Delta x$. Для начальной точки $x_0 = a$ приближенное значение производной «назад» не вычисляется.

Можно определить приближенное значение производной в точке x_i «вперед»

$$f_i' \approx \frac{f_{i+1} - f_i}{\Delta x}\quad i = 0, 1, \ldots, N\text{-}1.$$

В этом случае приближенное значение производной не вычисляется для конечной точки $x_N = b$.

На практике также применяется центральная разностная производная, которая вычисляется по формуле

$$f_i' \approx \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2\Delta x}\quad i = 1, 2, \ldots, N\text{-}1.$$

В этом случае приближенное значение производной не вычисляется для обеих граничных точек $x_0 = a$ и $x_N = b$.

Центральная разностная производная дает более точное приближение по сравнению с разностными аналогами «назад» и «вперед».

Используя полученные приближенные значения первой производной «назад», можно оценить вторую производную по аналогичной формуле:

$$f_i'' \approx \frac{f_i' - f_{i-1}'}{\Delta x},\ i = 2, 3, \ldots, N.$$

Пример 64. Для функции $f(x) = \mathrm{arctg}(x)$ в точке $x = 1$ найти приближенное значение производной, подсчитанной тремя способами («назад», «вперед» и «центрально») для шага $\Delta x = 0{,}1$. Подсчитать относительную погрешность в процентах (производная заданной функции $f_i' = \frac{1}{1+x^2}$ при $x = 1$ равна 0,5).

	A	B	C	D	E
1	*x*	f(x)	f'(x) «назад»	f'(x) «вперед»	центральная
2	0,9	=ATAN(A2)			
3	1	=ATAN(A3)	=(B3–B2)/0,1	=(B4–B3)/0,1	(B4-B2)/2/0,1
4	1,1	=ATAN(A4)			

Ответ: погрешность для производной «назад» равна 5,17%, для производной «вперед» – 4,83%, для «центральной» – 0,17%.

Пример 65. Протабулировать функцию $f(x) = 6\frac{x^2}{1+x^2}$ на отрезке [0, 3] с шагом $\Delta x = 0{,}1$. Найти приближенные значения первой и второй производной «назад». Построить графики $y = f(x)$, $y = f'(x)$ и $y = f''(x)$.

Решение.

1. Вводим в столбец A пошаговые значения аргумента.
2. Вводим в B2 формулу для исходной функции: =6*A2^2/(1+A2^2).

	A	B	C	D
1	*x*	f(x)	f'(x)	f''(x)
2	0	=6*A2^2/(1+A2^2)		
3	0,1		=(B3–B2)/0,1	
4	0,2			=(C4–C3)/0,1

3. Копируем формулу из B2 вниз.
4. Вводим в C3 формулу для производной: =(B3–B2)/0,1.
5. Копируем формулу из C3 вниз.

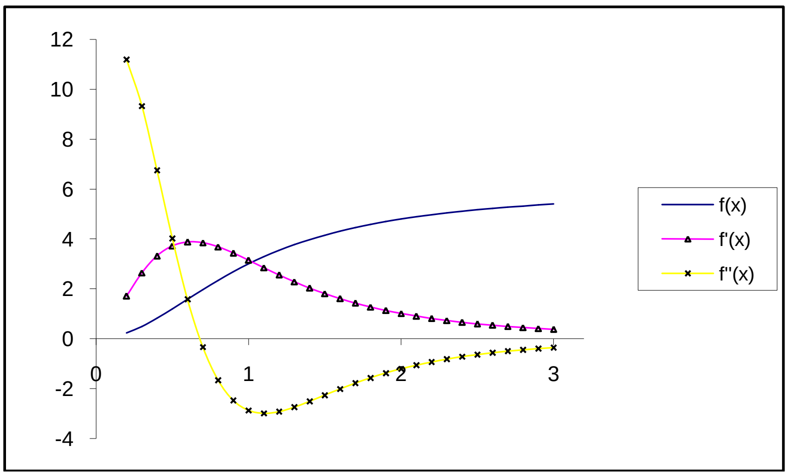


Рис. 5.1.1

6. Вводим в D4 формулу для производной от первой производной: =(C4–C3)/0,1.

7. Копируем формулу из D4 вниз.
8. Маркируем диапазон A4:D32 и строим график типа ТОЧЕЧНЫЙ.
Требуемые графики приведены на рис. 5.1.1.

5.3.Приближенное вычисление определенных интегралов

Пусть непрерывная функция $f(x)$ протабулирована на отрезке $[a, b]$ с шагом Δx и пусть $x_0 = a,\ x_i = a + i\cdot\Delta x,\ x_N = b,\ f_i = f(x_i)$.
При малых Δx справедливы следующие приближенные равенства.

Формула левых прямоугольников $\int_a^b f(x)dx \approx \Delta x \cdot \sum_{i=0}^{N-1} f_i$. Сумма не содержит значение функции в правой граничной точке отрезка табулирования f_N.

Формула правых прямоугольников $\int_a^b f(x)dx \approx \Delta x \cdot \sum_{i=1}^{N} f_i$. Сумма не содержит значение функции в левой граничной точке отрезка табулирования f_0.

Формула трапеций $\int_a^b f(x)dx \approx \Delta x \cdot \left(\sum_{i=1}^{N-1} f_i + \frac{f_0 + f_N}{2} \right)$.

Пример 66. Протабулировать функцию $f(x)=3x^2$ на отрезке [0; 1] с шагом Δx=0,1. Оценить интеграл $I = \int_0^1 3x^2 dx$ по формуле правых прямоугольников.

Решение.
1. Вводим в колонку А, начиная с А2, пошаговые значения аргумента с 0 (значение x_0) до 1,0 (значение x_N).
2. Вводим в ячейку В2 формулу: =3*A2^2 (значение f_0).
3. Копируем формулу из В2 вниз.
4. Вводим в ячейку С2 формулу: =СУММ(B3:B12)*0,1.

	A	B	C
1	*x*	f(x)	Оценка интеграла (формула правых прямоугольников)
2	0	=3*A2^2	=СУММ(B3:B12)*0,1
3	0,1	Копируем вниз	
4	0,2		

Ответ: I^*=1,155.

Замечание. Точное значение интеграла равно 1,0, поэтому можно оценить погрешность полученных приближений. Оценка I^*=1,155, полученная при шаге табулирования Δx = 0,1, имеет относительную погрешность 15,5%. Если подынтегральную функцию протабулировать с шагом Δx = 0,05, то получим оценку I^*=1,076 (относительная погрешность 7,6%). Для шага Δx = 0,025 получаем оценку I^*=1,038 (относительная погрешность 3,8%).Таким образом, с уменьшением шага табулирования в 2 раза точность приближения увеличивается в 2 раза.

Пример 67. Протабулировать функцию $f(x)=3x^2$ на отрезке [0; 1] с шагом $\Delta x = 0{,}1$.

Оценить интеграл I = $\int_0^1 3x^2 dx$ по формулам левых прямоугольников и трапеций.

Решение. Решение приведено на рис. 5.2.1. Оценка по формуле левых прямоугольников: $I^* = 0{,}855$, по формуле трапеций: $I^* = 1{,}005$.

	A	B	C
1	*x*	f(x)	Оценка интеграла (формула левых прямоугольников)
2	0	=3*A2^2	=СУММ(B2:B11)*0,1
3	0,1	Копируем вниз	Оценка интеграла (формула трапеции)
4	0,2		=(СУММ(B3:B11)+(B2+B12)/2)*0,1

Рис. 5.2.1

5.4. Формула Симпсона

Разобьем отрезок $[a, b]$ на $2N$ (четное число) частичных отрезков одинаковой длины Δx. Обозначим $x_0 = a$, $x_i = a + i\cdot\Delta x$, $x_{2N} = b$, $f_i = f(x_i)$. Номера узлов меняются с 0–го по $2N$ –й. Таким образом, всего будем иметь нечетное число (2N+1) узлов табулирования. Если на каждом участке из двух частичных отрезков функцию f(x) приблизить квадратичной, то интеграл можно оценить по формуле Симпсона (парабол):

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{\Delta x}{3}\cdot\left(f_0 + f_{2N} + 4\sum_{i=1}^{N} f_{2i-1} + 2\sum_{i=1}^{N-1} f_{2i}\right)$$

Значения функции в узлах с нечетными номерами 1, 3, …, 2N-1 берутся с коэффициентом 4, значения функции в узлах с четными номерами 2, 4, …, 2N-2 берутся с коэффициентом 2, значения функции в граничных узлах с номерами 0 и 2N берутся с коэффициентом 1.

Пример 68. Оценить интеграл I = $\int_0^4 (x^3 + x)dx$ по формуле Симпсона, разбив отрезок интегрирования на два равных частичных отрезка. Найти относительную погрешность (точное значение интеграла равно 72).

Решение. Отрезок [0; 4] разбиваем на два равных частичных отрезка, т.е. $\Delta x = 2$.

	A	B		C	
1	*x*	f(x)	Коэфф.		Оценка интеграла
2	0	=A2^3+A2	1	=B2*C2	=2/3*СУММ(C2:C4)
3	2	вниз	4	вниз	
4	4		1		
5					

Оценка интеграла по формуле Симпсона равна 72, погрешность равна 0%.

Пример 69. Протабулировать функцию $f(x)=3x^2$ на отрезке [0; 1] с шагом $\Delta x = 0,1$.

Оценить интеграл I = $\int_0^1 3x^2 dx$ по формуле Симпсона.

Решение. Для заданного шага будем иметь 10 участков и 11 узлов табулирования (номера с 0 – го по 10 – й), что отвечает требованиям для применения формулы Симпсона. Заполним таблицу, как показано на рисунке. Для быстрого копирования коэффициентов 4 и 2 маркируем ячейки C3: C4, правой кнопкой протягиваем маркер заполнения вниз до C11 и в открывшемся контекстном меню выбираем команду КОПИРОВАТЬ ЯЧЕЙКИ.

	A	B	C	D	
1	x	f(x)	Коэффиц.		Оценка интеграла
2	0,0	=3*A2^2	1	=B2*C2	=0,1/3*СУММ(D2:D12)
3	0,1	Копируем вниз	4	вниз	
4	0,2		2		
10	0,8		2		
11	0,9		4		
12	1,0		1		

Ответ: Оценка интеграла по формуле Симпсона равна 1, погрешность равна 0.

Примеры 68 и 69 иллюстрируют тот факт, что формула Симпсона дает нулевую погрешность независимо от шага табулирования, если подынтегральная функция является многочленом 3–го порядка и ниже. Это можно строго доказать. Для остальных гладких функций формула дает погрешность пропорциональную четвертой степени шага табулирования (Δx^4). Это означает, что при уменьшении шага, например, в два раза, погрешность уменьшается в 16 раз.

Пример 70. Протабулировать функцию $f(x)=sin(x)$ на отрезке $[0; \pi]$ с шагом $\Delta x = 0,25\pi$ и оценить интеграл I = $\int_0^{\pi} sinxdx$ по формуле Симпсона. Найти относительную погрешность (точное значение интеграла равно 2).

Решение. Узловые значения аргумента получим по рекуррентной формуле (см. рисунок) $x_{i+1}= x_i+0,25*\pi$

	A	B		C	
1	x	f(x)	Коэфф.		Оценка интеграла
2	0,0	=SIN(A2)	1	=B2*C2	=ПИ()*0,25/3*СУММ(C2:C6)
3	=A2+0,25*ПИ()	вниз	4	вниз	
4	вниз		2		
5			4		
6			1		

Оценка интеграла по формуле Симпсона равна 2,005, погрешность равна 0,23%.

§ 6. Дифференциальные уравнения

Уравнения, содержащие производную неизвестной функции, называются дифференциальными, например:

$$y' + yx^2 = sinx$$
$$xy'' + y' + e^x + 1 = 0$$

Многие уравнения можно решить лишь приближенно.

В данном пособии будем решать дифференциальные уравнения первого порядка в следующей постановке: найти на отрезке $[a; b]$ приближенное решение дифференциального уравнения

$$y' = f(y, x),$$

удовлетворяющее начальному условию $y(a) = y0$.

Зададим шаг табулирования $\Delta x = \frac{b-a}{N}$, где N – число узлов табулирования. Обозначим $y_i = y(x_i)$ значение неизвестной функции в i – м узле ($x_0 = a$, $x_i = a + i \cdot \Delta x$, $x_N = b$). В дальнейшем под приближенным решением дифференциального уравнения будем подразумевать поиск последовательности

$$y_i, \; i = 0, 1, \ldots, N.$$

6.1. Метод Эйлера

В методе Эйлера производная неизвестной функции заменяется своим разностным аналогом «вперед», и поэтому исходное уравнение преобразуется в следующее разностное:

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta x} = f(x_{i,} y_i).$$

Отсюда получается рекуррентная формула для нахождения последовательности y_i, $i = 0, 1, \ldots, N$:

$$y_{i+1} = y_i + \Delta x \cdot f(x_i, y_i)$$

с начальным условием $y_0 = y0$.

Таким образом, здесь, как и во многих других приближенных методах, решение дифференциального уравнения сводится к построению рекуррентной последовательности.

Пример 71. На отрезке [0; 1] найти приближенное решение дифференциального уравнения $y' = -2xy$ с начальным условием $y(0) = 3$. Шаг табулирования Δx=0,1. В качестве ответа записать значение $y^*(1)$. Сравнить с точным значением $y(1)$ (точное решение $y(x) = 3e^{-x^2}$) и найти абсолютную и относительную (в процентах) погрешность.

Решение.

Вводим в столбец A номера узлов с 0–го по 10–й.

Вводим в столбец B узлы табулирования с шагом 0,1.

	A	B	C	D
1	i	X_i	Y_i	
2	0	0	3	
3	1	0,1	=C2+(-2*B2*C2)*0,1	
4	2	0,2	Копируем вниз	

Ответ: $y^*(1) = y_{10}$=1,145. Точное значение 1,104. Абсолютная погрешность 0,041. Относительная погрешность 0,038 или 3,8%.

Пример 72. В условиях предыдущей задачи найти чувствительность решения $y^*(1)$ к 5% увеличению начального значения $y(0) = 3$.

Решение.

Изменяем значение в C2 с 3 на 3,15.

Ответ: новое значение $y^*(1)= y_{10}$=1,202. Чувствительность равна $\frac{1{,}202-1{,}145}{1{,}145} \cdot 100\%$ = 5,01%

Пример 73. Решить задачу примера 71, уменьшив шаг табулирования в два раза: Δx =0,05.

Ответ: новое значение $y^*(1)= y_{21}$=1,123. Абсолютная погрешность 0,020. Относительная погрешность 0,018 или 1,8%.

6.2.Метод Рунге-Кутта второго порядка

Этот метод дает более точные результаты и отличается от метода Эйлера способом построения рекуррентной последовательности. Особенность состоит в построении не одной, а двух последовательностей, одна из которых ($\tilde{y}$) носит вспомогательный характер:

$$y_0 = y0$$

$$\widetilde{y_{i+1}} = y_i + f(x_i, y_i) \cdot \Delta x$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, \widetilde{y_{i+1}})}{2} \cdot \Delta x$$

Пример 74. На отрезке [0; 1] найти приближенное решение дифференциального уравнения $y' = -2xy$ с начальным условием $y(0) = 3$ методом Рунге-Кутта. Шаг табулирования Δx=0,1. В качестве ответа записать значение $y^*(1)$. Сравнить с точным решением $y = 3e^{-x^2}$ и решением по методу Эйлера.

Решение.

Приводится на рисунке.

	A	B	C	D
1	*i*	X_i	Y_i^*	Y_i
2	0	0	0	3
3	1	0,1	=D2+(-2*B2*D2)*0,1	=D2+(-2*B2*D2 - 2*B3*C3) /2 *0,1
4	2	0,2	Копируем вниз	Копируем вниз

Ответ: $y^*(1)= y_{10}$=1,107. Точное значение $3e^{-1}$. Абсолютная погрешность 0,0035. Относительная погрешность 0,319%.

Метод Эйлера имеет первый порядок точности. Это означает, что погрешность решения пропорциональна первой степени шага табулирования Δx. Рассмотренный здесь метод Рунге-Кутта имеет второй порядок точности: погрешность пропорциональна квадрату шага табулирования Δx^2. Таким образом, при уменьшении шага табулирования в два раза погрешность метода Эйлера уменьшается тоже в два раза, а погрешность метода Рунге-Кутта уменьшается в 4 раза. В следующем параграфе рассмотрен метод четвертого порядка точности..

6.3. Метод Рунге-Кутта четвертого порядка

В этом методе строятся пять последовательностей, четыре из которых вспомогательные:

$$y_0 = y0 \ \text{начальное значение}$$
$$k_1 = \Delta x \cdot f(x_i,\ y_i)$$
$$k_2 = \Delta x \cdot f(x_i + 0{,}5\Delta x,\ y_i + 0{,}5k_1)$$
$$k_3 = \Delta x \cdot f(x_i + 0{,}5\Delta x,\ y_i + 0{,}5k_2)$$
$$k_4 = \Delta x \cdot f(x_i + \Delta x,\ y_i + k_3)$$
$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

Пример 75. На отрезке [0; 6] найти приближенное решение дифференциального уравнения $y' = x\sqrt{y}$ с начальным условием $y(0) = 1$ методом Рунге-Кутта четвертого порядка. Шаг табулирования Δx=0,2. В качестве ответа записать значение $y^*(6)$.

Сравнить с точным решением $y = \left(\frac{x^2}{4} + 1\right)^2$.

Решение. Вводим в C2 начальное значение y_0=1

В D2 вводим формулу для k_1 ($k_1 = \Delta x \cdot x\sqrt{y}$), значение x берем из B2, y из C2.

В E2 вводим формулу для k_2 ($k_2 = \Delta x \cdot (x + 0{,}5\Delta x)\sqrt{y + 0{,}5k_1}$), k_1 из D2

В F2 вводим формулу для k_3 ($k_3 = \Delta x \cdot (x + 0{,}5\Delta x)\sqrt{y + 0{,}5k_2}$), k_2 из E2

В G2 вводим формулу для k_4 ($k_4 = \Delta x \cdot (x + \Delta x)\sqrt{y + k_3}$), k_3 из F2

Опускаемся на строчку вниз и вводим в C3 формулу для вычисления y_1,

$$y_1 = y_0 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

причем значения y_0 , $k1$, k_2, k_3, k_4 берутся из предыдущей строки.

	A	B	C	D	E
1	*i*	x_i	y_i	k_1	k_2
2	0	0	1	=0,2*B2*C2^0,5	=0,2*(B2+0,5*0,2)*(C2+0,5*D2)^0,5
3	1	0,2	=C2+1/6*(D2+2*E2+2*F2+G2)	Копируем вниз	Копируем вниз
4	2	0,4	Копируем вниз		

	F	G
1	k_3	k_4
2	=0,2*(B2+0,5*0,2)*(C2+0,5*E2)^0,5	=0,2*(B2+0,2)*(C2+F2)^0,5
3	Копируем вниз	Копируем вниз

Приближенное значение $y^*(6)$=99,9997. Точное значение $y(6)= \left(\frac{36}{4} + 1\right)^2 = 100$

В силу своей высокой точности рассмотренный метод является наиболее распространенным на практике.

§ 7. Экстремальные значения функций

7.1. Максимумы и минимумы функции

Пример 76. Найти минимум функции $f(x) = x^2 + 2x + 3$.

Решение.

1. Ячейка A2 будет содержать изменяемую переменную x. Стартовое значение переменной положим равным единице, но можно любое другое.

	A	B	C
1	x	$f(x)$	
2	1	=A2^2+2*A2+3	
3			

2. Ячейка B2 будет целевой. Вводим в B2 формулу для минимизируемой функции.
3. Выбираем целевую ячейку и реализуем цепочку: вкладка ДАННЫЕ, группа АНАЛИЗ, кнопка ПОИСК РЕШЕНИЯ.
4. Устанавливаем параметры поиска:

целевая ячейка B2
цель поиска минимум
изменяя ячейки A2 (если щелкнуть по кнопке "Предположить", программа автоматически установит изменяемую ячейку $A$2).

5. Щелкаем по кнопке ВЫПОЛНИТЬ в окне ПОИСК РЕШЕНИЯ.

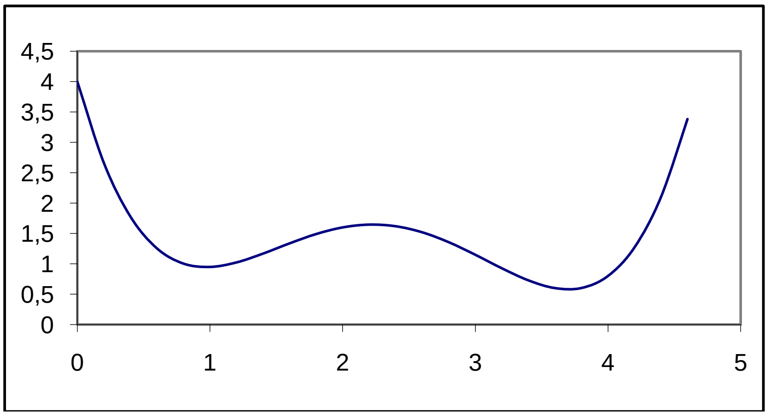
Ответ: минимум функции равен 2 и достигается при $x = -1$.

Поиск минимума функции $f(x)$ в Excel организован следующим образом. Для стартовой точки x_0 определяется направление, в котором функция убывает. Делаются шаги в направлении убывания, пока функция не начнет возрастать. Уточняется значение x, при котором убывание сменяется возрастанием (первый достаточный признак экстремума). Аналогично ищется точка максимума.

Ясно, что таким способом находятся локальные максимумы и минимумы, а не наибольшие или наименьшие значения функции. Однако в частных случаях они могут совпадать, как, например, для только что рассмотренной функции, у которой локальный минимум совпадает с наименьшим значением.

Если функция имеет несколько экстремумов, то EXCEL найдет экстремум, ближайший к стартовой точке.

Пример 77. Найти экстремумы функции $f(x) = 0{,}25x^4 - 2{,}3x^3 + 7x^2 - 8x + 4$.



Решение.

Построим график этой функции на отрезке [0; 4,6] с шагом Δx=0,2.

По графику видно, что у функции есть два минимума и один максимум.
Подготовим ячейки для программы ПОИСК РЕШЕНИЯ. Для этого скопируем формулу из B2 в E2:E4.

	A	B	C	D	E
1	*x*	*f*(*x*)		*x*	*f*(*x*)
2	0	=0,25*A2^4–2,3*A2^3+7*A2^2–8*A2+4	Поиск минимума	0,97	0,95
3	0,2	Копировать вниз	Поиск минимума	3,70	0,58
4	0,4		Поиск максимума	2,23	1,65

Найдем сначала минимумы.
Чтобы найти точку минимума в окрестности x=1, введем в D2 стартовое значение либо левее 1 (например, 0,5), либо между 1 и 2 (например, 1,5). В обоих случаях будет найден верный результат, который записан с точностью до двух десятичных знаков после запятой x_{min}= 0,97, y_{min}= 0,95. При этом целевая ячейка E2.
Поиск минимума в окрестности x=3,5 надо начинать со стартовых точек, находящихся правее 2,5. Изменяемая ячейка – D3, целевая – E3. В результате получено: x_{min}= 3,70, y_{min}=0,58.
Поиск максимума надо начинать со стартовой точки, находящейся между точками минимумов, т.е. 1 и 3,5. Изменяемая ячейка – D4, целевая – E4. Результатом будут следующие значения: x_{max}= 2,23, y_{max}= 1,65.
Если задать стартовую точку вне указанного интервала, решение не будет найдено.

7.2. Экстремальные значения при ограничениях

Пример 78. Найти минимум функции $f(x_1, x_2)=3x_1+2x_2$ при ограничениях на переменные:

$$14–2x_2 <= 7x_1,\ \ 4x_1+5x_2 >= 20,\ \ x_1,\ \ x_2 \text{ неотрицательны.}$$

Решение.
Перепишем ограничения в виде:

$$7x_1+2x_2>=14,$$

$$4x_1+5x_2 >= 20,\ \ x_1>=0,\ \ x_2>=0.$$

Заполним таблицу, как показано на рисунке.

	A	B	C	D	E
1	X_1	X_2	Ограничение	Ограничение	*f*(*x*)
2	1	1	=7*A2+2*B2	=4*A2+5*B2	=3*A2+2*B2

1. Ячейки A2 и B2 содержат стартовые значения изменяемых переменных x_1 и x_2.
2. Ячейки C2 и D2 содержат левые части неравенств-ограничений.
3. Целевая ячейка E2 содержит формулу минимизируемой функции.
4. Выбираем D2 и реализуем цепочку: ДАННЫЕ, АНАЛИЗ, ПОИСК РЕШЕНИЯ.
5. Устанавливаем цель поиска – МИНИМАЛЬНОЕ ЗНАЧЕНИЕ.

6. Щелчком мыши активизируем поле ввода "Изменяя Ячейки" и методом указания вводим диапазон A2:B2 изменяемых ячеек.
7. Щелкаем по кнопке ДОБАВИТЬ.
8. В окне ДОБАВЛЕНИЕ ОГРАНИЧЕНИЙ вводим методом указания диапазон ячеек A2:B2 (рис. 7.2.1).

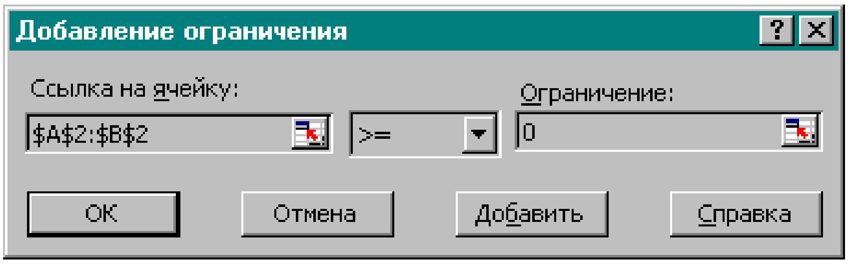


Рис. 7.2.1

9. В списке отношений выбираем больше либо равно {>=} и в поле ОГРАНИЧЕНИЕ вводим 0.
10. Щелкаем по кнопке ДОБАВИТЬ и заполняем поля.
«Ссылка на ячейку»: C2; «Отношение»: >= ; «Ограничение»: 14.
11. Щелкаем по кнопке ДОБАВИТЬ и заполняем поля
«Ссылка на ячейку»: D2; «Отношение»: >= ; «Ограничение»: 20.
12. Щелкаем по кнопке ОК.
13. Щелкаем по кнопке ВЫПОЛНИТЬ в окне ПОИСК РЕШЕНИЯ (рис. 7.2.2).

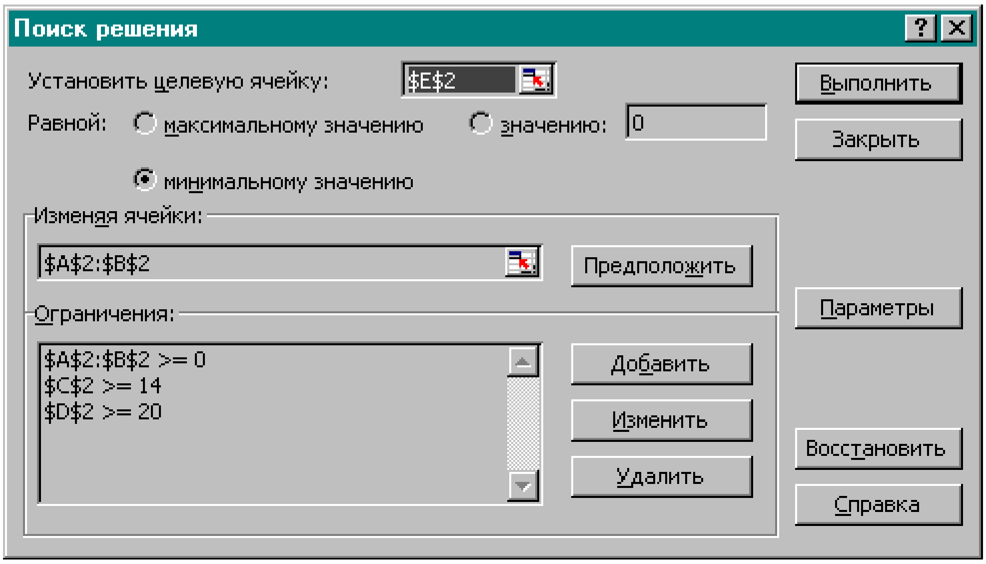


Рис. 7.2.2

12. При необходимости выбираем тип отчета и щелкаем ОК.
Полученные результаты представлены на рис. 7.2.3.

	A	B	C	D	E
1	X_1	X_2	Ограничение	Ограничение	$f(x)$
2	1,11	3,11	7,00	20,00	9,56

Рис. 3.2.3

Ответ: минимум целевой функции при заданных ограничениях равен 9,56 и достигается при x_1 = 1,11 и x_2 = 3,11.

Если ограничение типа равенства или неравенства можно записать так, что в левой части будет находиться одна переменная (типа x =… или x>…), нет необходимости заводить специальную ячейку для записи в нее формулы правой части ограничения. Эта формула вводится непосредственно в поле ОГРАНИЧЕНИЕ диалогового окна ДОБАВЛЕНИЕ ОГРАНИЧЕНИЙ (см. рис. 7.2.4 и 7.2.5).

Пример 79. Найти минимум функции $F = x^2+2y^2+3z^3$ при ограничениях $x + y + 2z = 5$ и $y - 2xz >= 0$.

Решение.

Представим ограничения в виде $x = 5 - y - 2z$ и $y >= 2xz$.

1. Присвоим ячейкам A2, B2, C2 имена x, y, z соответственно и введем в них стартовые значения переменных, равные единице:

	A	B	C	D
1	*x*	*y*	*z*	*F*
2	1	1	1	=x^2+2*y^2+3*z^2

2. Заполним целевую ячейку D2 формулой минимизируемой функции =x^2+2*y^2+3*z^2.

3. Вызываем ПОИСК РЕШЕНИЯ и устанавливаем параметры:

целевая ячейка D2

цель поиска минимум

изменяя ячейки A2:C2 (или X;Y;Z)

ограничения A2=5–B2–2*C2 (или X=5–Y–2*Z , см. рис. 6.2.5)

B2>=2*A2*C2 (или Y>=2*X*Z, см. рис. 6.2.6)

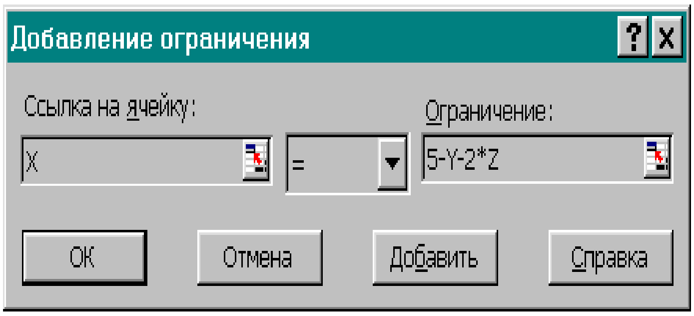


Рис. 7.2.4

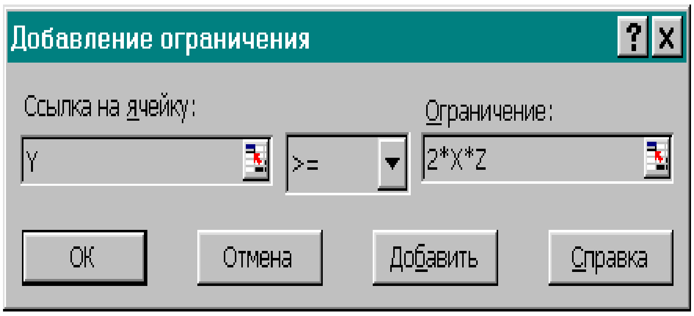


Рис. 7.2.5

	A	B	C	D
1	*x*	*y*	z.	F
2	0,56	1,60	1,42	11,47

Ответ: x=0,56; y=1,60; z=1,42; $F_{мин}$=11,47.

7.3.Чувствительность оптимального решения к изменению параметров

Пусть. L^{opt} – максимальное значение целевой функции для задачи:

$$L = c_1 x_1 + c_2 x_2 \to max$$

при ограничениях

$$a_{11} x_1 + a_{12} x_2 \le b_1$$
$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 \le b_2$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

Исследуем вопрос: на сколько процентов изменится L^{opt}, если один из параметров (коэффициентов a_{ij}, c_i, b_i) изменить на заданное число процентов.

Пример 80.Для задачи

$$L = 10x_1 + 12x_2 \to max$$

при ограничениях

$$1x_1 + 2x_2 \le 100$$
$$2x_1 + 1x_2 \le 150$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

Найти чувствительность L^{opt} к 1% – му увеличению b_1, b_2, a_{22}.

Решение.

Решаем исходную задачу с помощью программы ПОИСК РЕШЕНИЯ. Получим $\boldsymbol{L^{opt}}$= 866,667 при x_1.= 66,667**,** x_2.= 16,667.

Меняем значение b_1 с 100 на 101. Программа ПОИСК РЕШЕНИЯ дает 0,54% – е увеличение оптимального значения целевой функции ($\boldsymbol{L^{opt}}$= 871,333).

Восстанавливаем старое значение b_1 и меняем значение b_2 с 150 на 151,5. Чувствительность равна 0,46%

Восстанавливаем старое значение b_2 и меняем значение a_{22} с 1 на 1,01. Чувствительность равна –0,53%

§ 8. Уравнения, системы уравнений и последовательности

8.1. Решение уравнений

Пример 81. Решить уравнение $x^3 + x = 1$.

Решение.

Заполним таблицу, как показано на рисунке.

	A	B	C
1	*x*	*F*(*x*)	
2	1	=A2^3+A2	

Вызываем ПОИСК РЕШЕНИЯ и устанавливаем параметры поиска

целевая ячейка B2

цель поиска *значение* 1

изменяя ячейки A2

Ответ: x = 0,682.

Пример 82. Решить уравнение $2^x = x + 3$.

Решение.

Перепишем уравнение в виде $2^x - x - 3 = 0$. Заполним таблицу, как показано на рисунке.

	A	B	C
1	*x*	*F*(*x*)	
2	1	=2^A2 – A2 – 3	

Вызываем ПОИСК РЕШЕНИЯ и устанавливаем параметры поиска:

целевая ячейка B2

цель поиска *значение* 0

изменяя ячейки A2

Ответ: x = 2,445.

8.2. Решение систем

Если система уравнений имеет единственное решение, программа ПОИСК РЕШЕНИЯ обязательно его найдет.

Пример 83. Решить систему уравнений $\begin{cases} x + 3y = 1 \\ 2x - y = 9 \end{cases}$.

Решение.

	A	B
1	*x*	*y*
2	1	1
3		
4	F1	F2
5	=A2+3*B2	=2*A2–B2

Перепишем систему, введя обозначения для левых частей уравнений:

$$\begin{cases} F_1(x, y) = 1 \\ F_2(x, y) = 9 \end{cases}.$$

Заполним таблицу, как показано на рисунке.

Примем одну из функций, например, F1 за целевую, тогда другая функция F2 будет задавать ограничение.

1. Вызываем ПОИСК РЕШЕНИЯ и устанавливаем

следующие параметры:

целевая ячейка A5
цель поиска 1
изменяя ячейки A2:B2
ограничения B5 = 9

Ответ: x = 4; y = –1.

Пример 84. Решить систему $\begin{cases} y - x = 5 \\ z(y - x) - 4y = -30 \\ 2z(y - x) - 4y = 0 \end{cases}$.

Решение.

Перепишем систему, введя обозначения для левых частей уравнений: $\begin{cases} F_1 = 5 \\ F_2 = -30 \\ F_3 = 0 \end{cases}$.

Заполним таблицу (рис. 8.2.1). Стартовые значения неизвестных полагаем равными 1. В качестве целевой функции выберем F2 (ячейка B5). Вызываем ПОИСК РЕШЕНИЯ и устанавливаем следующие параметры:

	A	B	C
1	*x*	*y*	z.
2	0,56	1,60	1,42
3			
4	F1	F2	F3
5	=B2–A2	=C2*(B2–A2)–4*B2	=2*C2*(B2–A2)–4*B2

Рис. 8.2.1

целевая ячейка B5
цель поиска –30
изменяя ячейки A2:C2
ограничения A5=5; C5=0

	A	B	C
1	*x*	*y*	z.
2	10	15	6
3			
4	F1	F2	F3
5	5	–30	0

Рис. 8.2.2

Ответ: x = 10; y = 15; z = 6.

Если система уравнений имеет несколько решений, программа ПОИСК РЕШЕНИЯ найдет решение, ближайшее к стартовым значениям неизвестных. Для отыскания всех решений нужно их локализовать, т.е. установить хотя бы грубо области их расположения. Каждая область должна при этом содержать только одно решение. Далее поиск проводится в каждой такой области.

Пример 85. Решить систему уравнений $\begin{cases} x+3y=1 \\ x^2+y^2=9 \end{cases}$.

Решение.

Первое уравнение системы задает прямую линию, второе уравнение задает окружность. Прямая пересекает окружность в двух точках. Это можно установить, построив соответствующие графики. Первая точка лежит в окрестности точки с координатами x = –3, y = 1, вторая лежит в окрестности точки с координатами x = 3, y = –1. Следовательно, система имеет два решения.

Найдем первое решение.

1.Заполним таблицу, как на рисунке.

2.Ограничим область поиска прямоугольником –3 < x < 0, 0 < y < 3 и установим внутри этой области стартовые значения неизвестных x0= –1, y0=1.

3. В качестве целевой функции выберем F1 (ячейка A5).

	A	B
1	*x*	*y*
2	-1	1
3		
4	F1	F2
5	=A2+3*B2	=A2^2+B2^2

4. Вызываем ПОИСК РЕШЕНИЯ и устанавливаем следующие параметры поиска:

целевая ячейка A5
цель поиска 1
изменяя ячейки A2:B2
ограничения B5 = 9; A2 <=0; A2 >= –3; B2 <=3; B2 >=0

Ответ: x = –2,73; y=1,24.

Второе решение ищем в области 0 < x < 3, –3 < y < 0. Стартовые значения неизвестных: x0= 1, y0= –1. Параметры поиска отличаются от предыдущих установок только ограничениями (выделены курсивом):

ограничения B5 = 9; *A2 <= 3;*A2 >= 0; *B2 <= 0; B2 >= –3.*

Ответ: x = 2,93; y= –0,64.

8.3.Исследование последовательностей

Пример 86.Для чисел $a_1, a_2, \dots, a_{33}$ верны равенства $a_{n+1} = f(a_n)$. При каком значении первого числа a_1 значение последнего числа a_{33} равно 0, если

$$f(x) = \begin{cases} 4 + \dfrac{24}{x-4}, & x < 4 \\ 3 - \dfrac{16}{x} + log_3\left(9 - \dfrac{80}{x+5}\right), & x \geq 4 \end{cases}$$

Решить сначала в предположении a_1<4, а затем в предположении a_1>4.

Решение.

	A	B
1	n	a_n
2	1	1,5
	2	ЕСЛИ(B1<4; 4+24/(B1-4); 3-16/B1+LOG(9-80/(B1+5);3))

Задаем стартовое значение для a_1 = 1,5 (можно любое другое < 4). Вводим в B2 формулу (см. рисунок) и копируем ее вниз, вплоть до B34.
Вызываем ПОИСК РЕШЕНИЯ и устанавливаем параметры поиска:

целевая ячейка	B34
цель поиска	значение 0
изменяя ячейки	B2
ограничения	B2 <= 4

Ответ: a_1 = 0

Задаем стартовое значение для a_1 = 5 (можно любое другое > 4)
В параметрах поиска меняем только:

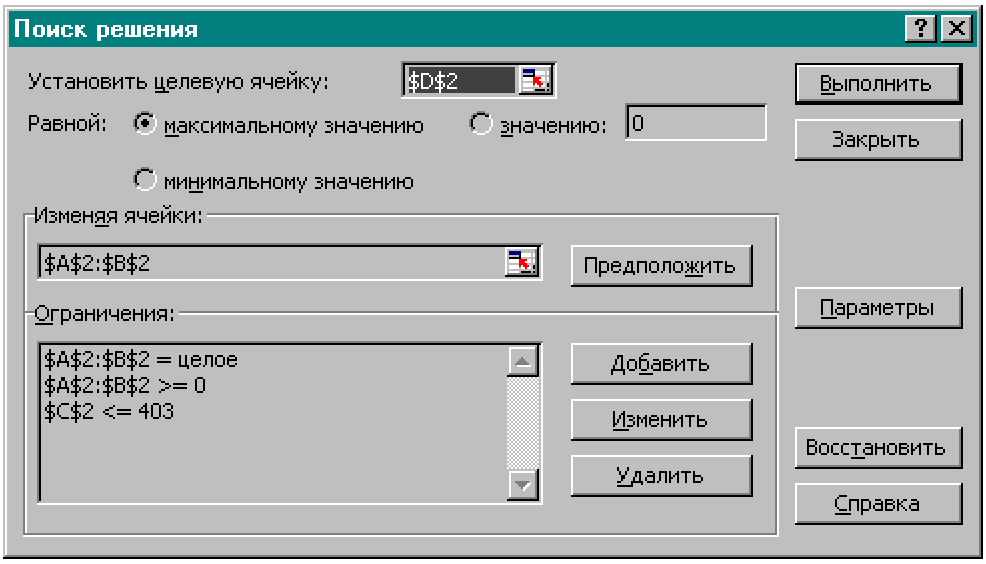
ограничения	B2 >= 4

Ответ: a_1 = 4,172.

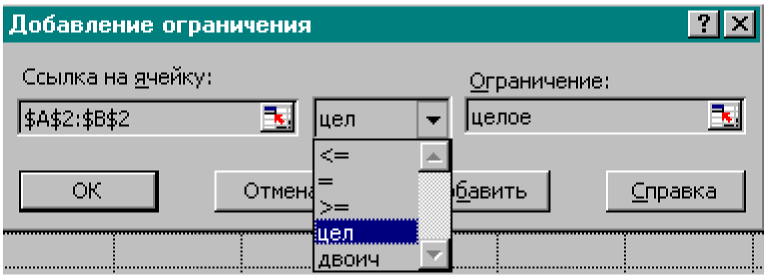
8.4.Оптимизация в целых числах

Пример 87. Решить оптимизационную задачу: $100x_1+470x_2 \to \max$, если $2x_1+9x_2<=403$ и x_1, x_2 – целые неотрицательные числа.
Решение.

	A	B	C	D
1	x_1	x_2	Ограничение	$f(x)$
2	1	1	=2*A2+9*B2	=100*A2+470*B2



При задании параметров поиска в качестве ограничения задаем целочисленность переменных:



Ответ: максимальное значение равно 20980 и достигается при $x_1 = 3$, $x_2 = 44$.

Замечание. Если убрать требование целочисленности переменных, то максимальное значение будет равно 21045,56 при $x_1 = 0$, $x_2 = 44{,}78$.

8.5. Оптимизация в булевых переменных

Частным случаем задачи с целочисленными переменными являются задачи, в которых переменные могут принимать только два значения 0 или 1. Такие переменные в честь предложившего их английского математика Джорджа Буля называют булевыми. Другие названия булевых переменных – двоичные или бинарные.

Пример 88. Имеется 6 предметов, каждый из которых характеризуется весом и ценой (рис. 7.6.1). Нужно выбрать из них такие предметы, чтобы их общий вес не превышал 12 единиц, а суммарная цена была максимальной (“задача о рюкзаке”).

	A	B	C	D
1	Предметы	Вес	Цена	Наличие
2	П1	9	20	0
3	П2	8	16	0
4	П3	6	11	0
5	П4	5	9	0
6	П5	4	7	0
7	П6	1	1	0
8	Суммарный вес	=СУММПРОИЗВ(B2:B7;D2:D7)		
9	Сумма цен	=СУММПРОИЗВ(C2:C7;D2:D7)		

Решение. Заполняем таблицу, как показано на рисунке.
Вызываем ПОИСК РЕШЕНИЯ и устанавливаем параметры поиска:

целевая ячейка	B9
цель поиска	максимум
изменяя ячейки	D2:D7
ограничения	B8 <= 12
	D2:D7 – двоичные

Ответ: Максимум суммы цен равен 23 и достигается, если выбрать второй и пятый предметы (D2=0, D3=1, D4=0, D5 =0, D6=1, D7=0).

Упражнение. Решить “задачу о рюкзаке” для 10 предметов. Веса и цены задаются строками соответственно

(15, 13, 12, 11, 10, 9, 7, 5, 3, 2),
(50, 38, 37, 34, 31, 30, 22, 15, 10, 7).

Вес не должен превосходить 50. В качестве ответа указать стоимость оптимального “ рюкзака”.

Ответ: 162 (берутся предметы с номерами 1, 4, 5, 6, 9, 10).

Упражнение. Решить предыдущую задачу с ограничением на вес 60.

Ответ: 190 (берутся предметы с номерами 1, 3, 4, 6, 7, 9, 10).

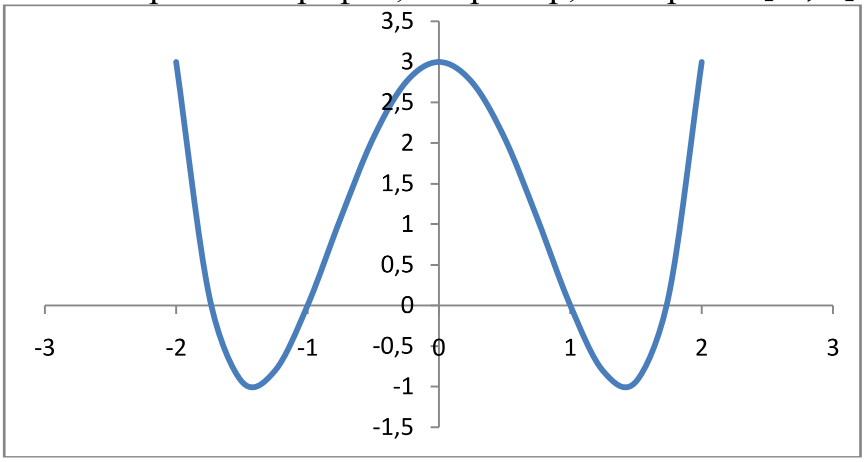
§ 9. Неравенства

9.1. Обобщенный метод интервалов

В основе метода лежит свойство непрерывной функции сохранять свой знак на промежутке между двумя своими соседними нулями (нулем функции называется значение аргумента x, при котором функция равна 0).

Пример 89. Решить неравенство $x^4 - 4x^2 + 3 < 0$. Указать длину (сумму длин) интервалов решения.

Решение: Находим нули функции из левой части неравенства. Для этого предварительно строим ее график, например, на отрезке [-2; 2].



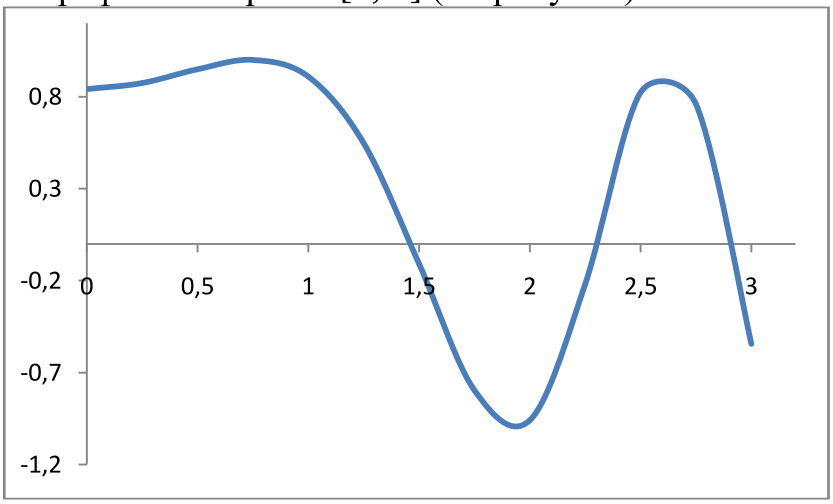
У рассмотренной функции 4 нуля. Находим их с помощью программы ПОИСК РЕШЕНИЯ: – 1,732; – 1; 1; 1,732. Из графика устанавливаем промежутки, на которых функция принимает отрицательные значения:

(– 1,732; – 1) и (1; 1,732). Итак, решение состоит из двух интервалов. Сумма их длин равна 1,464

9.2.Решение неравенств на отрезке

Пример 90.Решить неравенство $\sin(x^2 + 1) > 0$ на отрезке [0; 3]. Указать сумму длин интервалов решения.

Решение: Находим нули функции $y = \sin(x^2 + 1)$. Для этого предварительно строим ее график на отрезке [0; 3] (см.рисунок).



Программа ПОИСК РЕШЕНИЯ дает следующие значения нулей:

1,463, 2,299, 2,903.

Промежутки решения неравенства на заданном отрезке это: [0; 1,463] и [2,299; 2,903]. Сумма длин равна (1,463-0)+(2,299-2,903) = 2,067. *Ответ:* 2,067.

§ 10. Случайные числа

10.1. Вычисление характеристик дискретных случайных величин

Дискретная случайная величина задается таблицей, в верхней строке которой находятся возможные значения случайной величины, а в нижней – вероятности, с которыми эти значения могут появляться. Такая таблица называется законом распределения.

Пусть случайная величина ξ – оценка, полученная на первом экзамене по информатике некоторым наудачу выбранным студентом. Закон распределения такой случайной величины может иметь следующий вид

x_i	2	3	4	5
p_i	0,1	0,2	0,45	0,25

Распределение оценки на первой пересдаче может быть иным, например,

x_i	2	3	4	5
p_i	0,17	0,65	0,15	0,03

Это уже будет другая случайная величина. Обозначим её буквой η.

Важнейшими числовыми характеристиками случайной величины являются математическое ожидание, дисперсия и среднеквадратическое отклонение: $M(\xi)$, $D(\xi)$ и $\sigma(\xi)$. Эти числовые характеристики определяются по формулам:

$$M(\xi) = \sum_i x_i p_i\,,\ D(\xi) = \sum_i x_i^2 p_i - (M(\xi))^2,\ \sigma(\xi) = \sqrt{D(\xi)}\,.$$

Пример 91. Вычислить числовые характеристики для рассмотренных случайных величин ξ и η .

Решение.

	A	B	C	D	E
1	x_i	2	3	4	5
2	p_i	0,1	0,2	0,45	0,25
3		3,85	15,65	0,83	0,91

Вводим в B3 формулу = СУММПРОИЗВ(B1:E1; B2:E2) (среднее значение).

В C3 = СУММПРОИЗВ(B1:E1; B1:E1; B2:E2) (среднее значение квадрата – вспомогательная величина).

В D3 = C3 – B3^2 (дисперсия).

В E3 = КОРЕНЬ(D3) (среднеквадратическое отклонение или разброс).

Вывод: средняя оценка на первом экзамене по информатике равна 3,85 с разбросом 0,91.

Аналогично получаем числовые характеристики оценки на первой пересдаче, а именно: средняя оценка равна 3,04, разброс – 0,66. Таким образом, оценка на пересдаче в среднем хотя и ниже, но судя по разбросу, более предсказуема, чем на первом экзамене.

10.2. Генерирование дискретных случайных чисел. Программа АНАЛИЗ ДАННЫХ. Гистограмма

Для получения наборов случайных чисел используется программа ГЕНЕРАЦИЯ СЛУЧАЙНЫХ ЧИСЕЛ, которая вызывается цепочкой: вкладка ДАННЫЕ, группа

АНАЛИЗ, кнопка АНАЛИЗ ДАННЫХ. Диалоговое окно этой программы имеет вид (рис. 8.2.1).

Число переменных – число столбцов, в которые будут выводиться значения.

Число случайных чисел – количество чисел в каждом столбце.

В диапазоне A1:A4 возможные значения, в диапазоне B1:B4 вероятности, соответственно первая и вторая строки таблицы распределения.

Требуется, чтобы возможные значения и их вероятности располагались в столбцах, а не в строках.

Пример 92. Промоделировать результаты экзамена по информатике в группе из 20 студентов. Построить гистограмму частот и гистограмму относительных частот.

	A	B	C
1	x_i	p_i	Оценки
2	2	0,1	
3	3	0,2	
4	4	0,45	
5	5	0,25	

Решение.

Заполним диапазон A1:B5. В столбец C, начиная с C2 будут вводиться сгенерированные случайные числа (оценки за экзамен).

Вызываем программу ДАННЫЕ, АНАЛИЗ ДАННЫХ, ГЕНЕРАЦИЯ СЛУЧАЙНЫХ ЧИСЕЛ. Заполняем поля следующим образом (рис. 8.2.1):

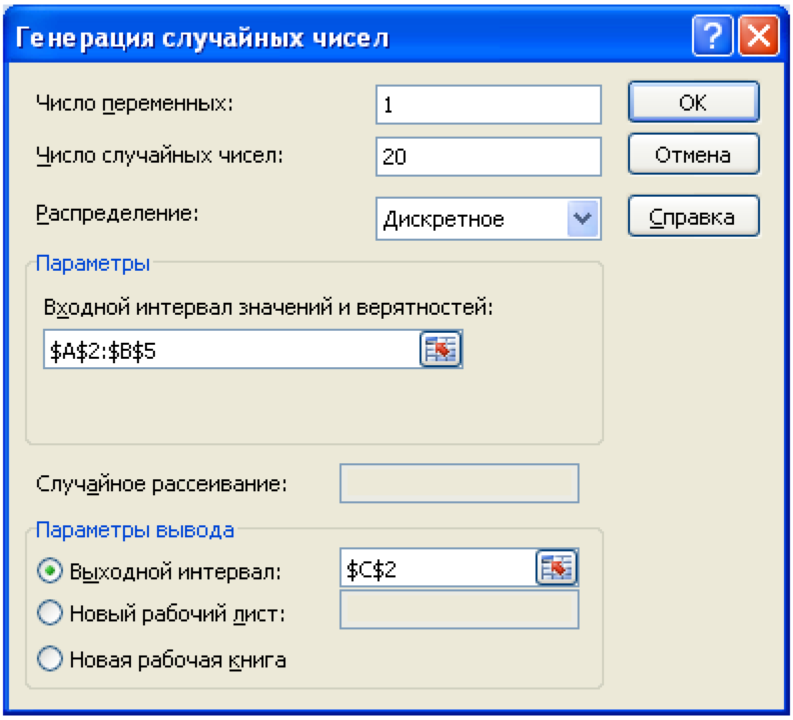


Рис. 8.2.1

число переменных 1
число случайных чисел 20
распределение дискретное
входной интервал значений и вероятностей A2:B5
выходной интервал C2:C21 (можно указать только начало диапазона C2).

Нажимаем ОК.

В диапазон C2:C21 будет выведено 20 чисел (оценок).

Заполним диапазон D1:E5, как показано на рисунке.

	D	E
1	Границы карманов	Карман
2	2	(–∞; 2]
3	3	(2; 3]
4	4	(3, 4]
5	5	(4, 5]
6		(5, ∞)

Введенные границы карманов задают следующие числовые промежутки (–∞; 2], (2; 3], (3, 4], (4, 5], (5, ∞). Excel подсчитает количество попаданий сгенерированных чисел в указанные промежутки и выведет эти значения и границы карманов в указанный диапазон (F1:G6).
Вызываем программу ДАННЫЕ, АНАЛИЗ ДАННЫХ, ГИСТОГРАММА и заполняем поля ввода, как показано на рисунке 8.2.2.

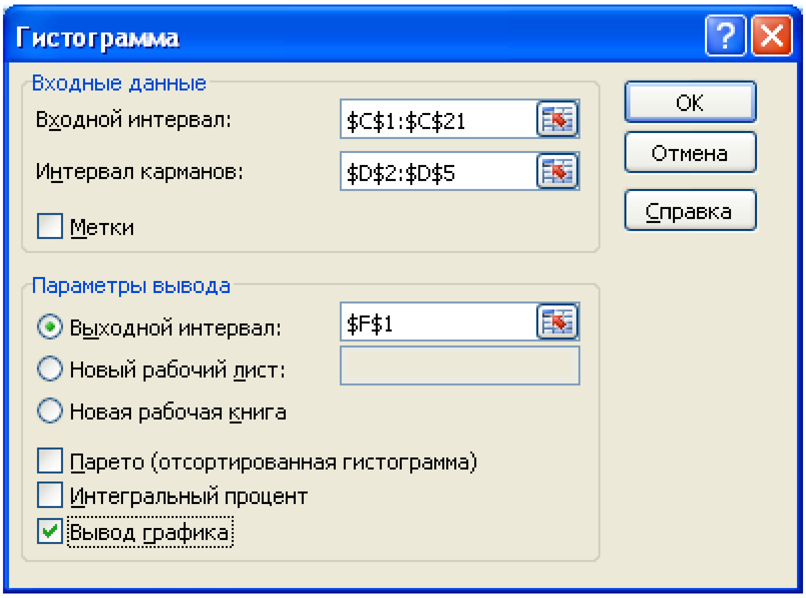
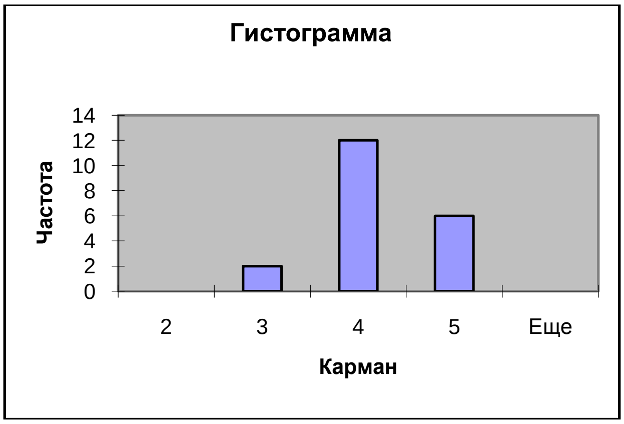


Рис. 8.2.2

Excel выведет расчетные данные в F1:G6 и диаграмму с гистограммой частот:

	F	G	
1	**Карман**	**Частота**	**Относительная частота**
2	2	0	0
3	3	2	0,1
4	4	12	0,6
5	5	6	0,3
6	еще	0	



Расположим в H2:H5 относительные частоты: введем в H2 формулу =G2/20 и скопируем ее вниз. Выделим диапазон F2:F5 и G2:G5. Построим диаграмму типа *Гистограмма*. Обратим внимание, что относительные частоты довольно сильно отличаются от соответствующих вероятностей. Это объясняется небольшой выборкой (20 экземпляров).
Пример 93. Промоделировать результаты экзамена по информатике на факультете МЭО (220 человек). Построить гистограмму частот и гистограмму относительных частот.

Решение.
Перейдем на новый лист и скопируем диапазон A1:E6 предыдущего листа. Вызываем программу ДАННЫЕ, АНАЛИЗ ДАННЫХ, ГЕНЕРАЦИЯ СЛУЧАЙНЫХ ЧИСЕЛ. Заполняем поля:

число переменных 1
число случайных чисел 220
распределение дискретное
входной интервал значений и вероятностей A2:B5
выходной интервал C2. Можно задать только первую ячейку диапазона.

Дальнейшие действия такие же, как и в предыдущей задаче.
Сравните относительные частоты и исходные вероятности и убедитесь, что они различаются незначительно. Типичный результат представлен на рисунке. Карман «еще» содержит частоту значений, превосходящих верхнюю границу 5. Таких значений, естественно, не оказалось. Близость относительных частот и вероятностей объясняется достаточно большим объемом выборки (220 экземпляров).

	F	G	
1	**Карман**	**Частота**	**Относительная частота**
2	2	21	0,10
3	3	40	0,18
4	4	105	0,48
5	5	54	0,25
6	*еще*	0	

В заключение заметим, что для построения гистограммы частот не обязательно задавать границы карманов. В этом случае Excel сам установит границы, однако они могут быть неудачными. Попробуйте убедиться в этом самостоятельно.

10.3. Генерирование равномерно распределенных случайных чисел. Функция СЛЧИС

Пример 94. Ввести в строку 1, начиная с A1, последовательность из 8 случайных чисел, равномерно распределенных на отрезке [0; 1]. Найти выборочную среднюю, выборочную дисперсию и исправленную выборочную дисперсию.
Решение.
Используем функцию СЛЧИС(), которая генерирует случайные числа, равномерно распределенные на отрезке [0; 1]. У неё отсутствуют аргументы, но круглые скобки обязательны.

Выборочная средняя $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ вычисляется с помощью функции СРЗНАЧ. Выборочная дисперсия $S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{X})^2$ вычисляется с помощью функции ДИСПР.

Исправленная выборочная дисперсия $S_0^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{X})^2$ вычисляется с помощью функции ДИСП.

1. В ячейку A1 вводим формулу: =СЛЧИС().
2. Копируем формулу ячейки A1 вправо в B1:H1.
3. В ячейку A2 вводим формулу: =СРЗНАЧ(A1:H1).
4. В ячейку B2 вводим формулу: =ДИСПР(A1:H1).
5. В ячейку C2 вводим формулу: =ДИСП (A1:H1).

	A	B	C	D	E	F	G	H	
1	0,528	0,994	0,227	0,478	0,867	0,897	0,427	0,629	
2	0,63	0,25	0,27						
3									

Особенностью функции СЛЧИС является то, что она пересчитывается всякий раз, как вносятся изменения в любую из ячеек листа. В этом можно убедиться, выбрав любую пустую ячейку и нажав клавишу DEL. Это происходит из-за того, что EXCEL настроен на автоматический перерасчет формул. Для «замораживания» результатов вычислений необходимо реализовать цепочку: кнопка Office, кнопка ПАРАМЕТРЫ EXCEL, команда ФОРМУЛЫ, группа ПАРАМЕТРЫ ВЫЧИСЛЕНИЙ и установить флажок на строке ВРУЧНУЮ. В этом случае пересчет формул и, следовательно, генерирование новых экземпляров случайных чисел, будет производиться только по воле пользователя при нажатии клавиши F9.

Пример 95. Ввести в строку 1 последовательность из 8 случайных чисел, равномерно распределенных на отрезке [0; 5].

Решение.

В ячейку А1 вводим формулу: =5*СЛЧИС() и т.д.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	3,301	4,424	4,881	0,363	0,594	3,459	0,758	1,259
2								

Пример 96. Ввести в строку 1 последовательность из 8 случайных чисел, равномерно распределенных на отрезке [–1; 2].

Решение.

В ячейку А1 вводим формулу: = –1+3*СЛЧИС() и т.д.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	0,320	–0,645	1,655	–0,318	0,364	1,144	0,292	–0,426
2								

10.4. Генерирование нормально распределенных случайных чисел. Функция НОРМОБР

Для генерации нормально распределенных случайных чисел используем функцию НОРМОБР(r, m, σ), которая по заданному значению вероятности r возвращает квантиль порядка r. Если в качестве r взять случайную величину, равномерно распределенную на [0 ; 1], то будем получать значения случайной величины нормально распределенной с параметрами m и σ.

Ввести в первую строку листа последовательность из 10 случайных чисел, имеющих нормальное распределение с математическим ожиданием m=7 и среднеквадратическим отклонением σ =2. Найти $\overline{X}$ и S_0^2 и расположить их в ячейках А2 и В2 соответственно. Отметим заранее, что необходимо получить приближенные равенства $\overline{X} \approx 7$ и $S^2 \approx 4$.

Решение.

1. В ячейку А1 вводим формулу: =НОРМОБР(СЛЧИС(); 7; 2).

2. В ячейку A2 вводим формулу: =СРЗНАЧ(A1:J1).
3. В ячейку B2 вводим формулу: =ДИСП(A1:J1).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	7,698	7,861	6,089	5,894	6,244	6,683	5,084	4,652	5,830	8,568
2	6,460	1,562								
3										

10.5. Квазислучайные последовательности

Как мы уже убедились, функция СЛЧИС() нам неподконтрольна и выдает всякий раз новые числа. Для того чтобы в ряде специальных задач у всех получались одинаковые результаты, мы вместо СЛЧИС() будем использовать некоторую «почти случайную» последовательность, каждый элемент которой однозначно определяется по своему номеру и находится в пределах от 0 до 1. Такую последовательность будем называть «учебной» заменой функции СЛЧИС() или квазислучайной последовательностью.

Пример 97.: Построить три квазислучайные последовательности, имитирующие случайные числа, равномерно распределенные на отрезке [0; 1] (аналоги датчика СЛЧИС())

$S1_n = COS^2(n)$,

$S2_n = ABS(COS(n))$,

$S3_n = ACOS(COS(n))/\pi$, n=1, 2, …100.

Найти для каждой последовательности средние значения и исправленные дисперсии и сравнить их с теоретическими аналогами 0,5, 1/12 = 0,083.

Вводим в A2:A101 номера элементов с 1 – го по 100 – й.

Вводим формулы, как показано на рисунке.

	A	B	C	D	E
1	*n*	$S1_\text{n}$	$S2_\text{n}$	$S3_\text{n}$	Границы карманов
2	1	=COS(A2)^2	=ABS(COS(A2))	=ACOS(COS(A2))/ПИ()	0,1
3	2				0,2

Для определения средних и исправленных дисперсий используем функции СРЗНАЧ и ДИСП.

Вводим в B102 формулу =СРЗНАЧ(B2:B101) и копируем вправо до D102.

Вводим в B103 формулу =ДИСП(B2:B101) и копируем вправо до D103.

Ответ: 0,497, 0,126 (S1); 0,634, 0,096 (S2); 0,503, 0,083 (S3).

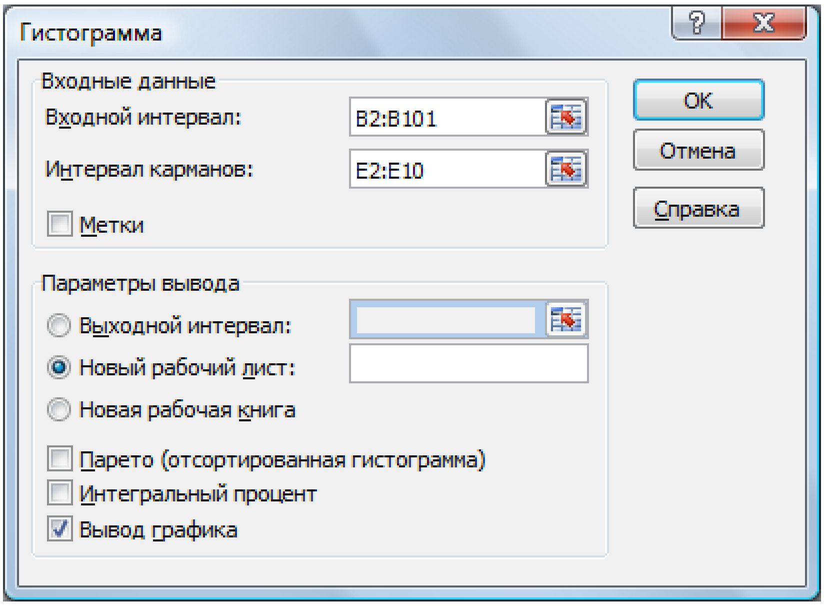
Лучшие характеристики имеет третья последовательность: среднее отличается от 0,5 на три тысячных, а выборочная дисперсия отличается от 1/12 на две миллионные. Первая последовательность лучше второй по параметру “среднее” и хуже второй по параметру “дисперсия”.

Пример 98.Для последовательностей из предыдущего примера построить гистограммы с шириной карманов 0,1. Сравнить с графиком плотности равномерно распределенной на отрезке [0; 1] случайной величины.

Покажем, как построить гистограмму для последовательности S1.

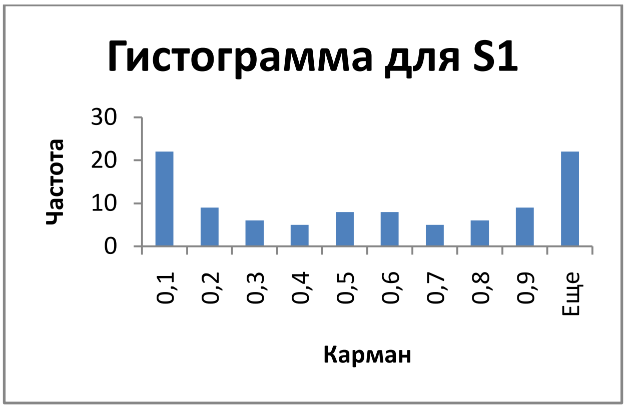
Вводим в диапазон E2:E10 границы карманов (0,1; 0,2; …; 0,8; 0,9).

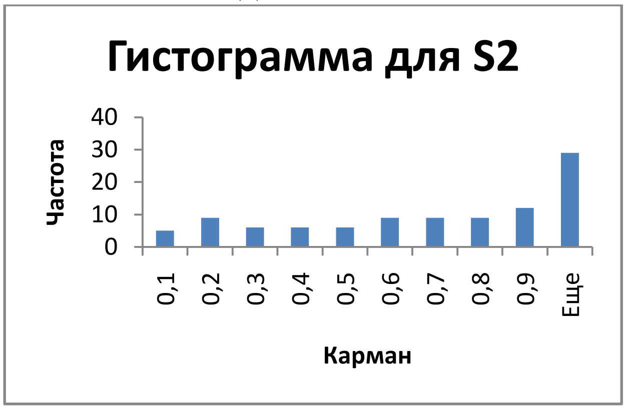
Далее: вкладка ДАННЫЕ, группа АНАЛИЗ, кнопка АНАЛИЗ ДАННЫХ, строка списка ГИСТОГРАММА.

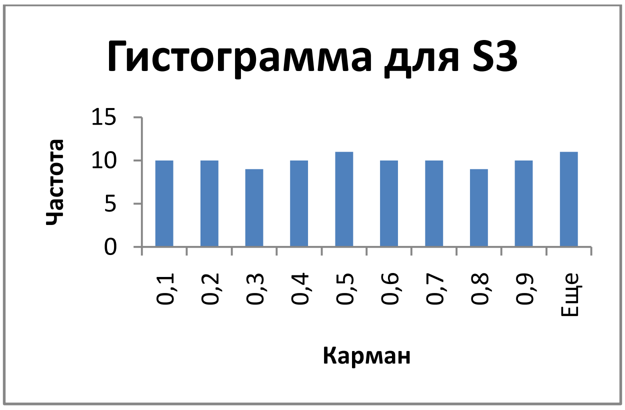


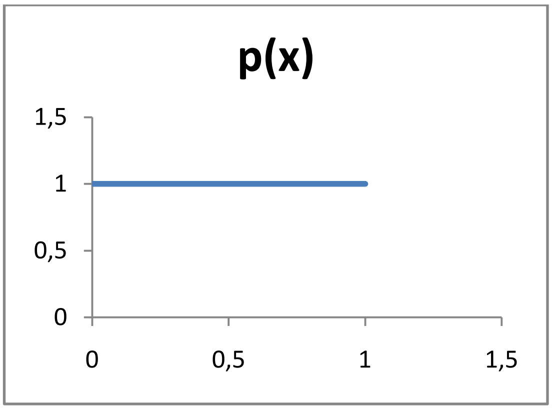
В диалоговом окне ГИСТОГРАММА устанавливаем параметры, как показано на рисунке (обязательно поставить флажок на строку ВЫВОД ГРАФИКА)

Аналогично получаем гистограммы для S2 и S3, вызывая диалог ГИСТОГРАММА и меняя ВХОДНОЙ ИНТЕРВАЛ сначала на C2:C101, а затем на D2:D101.
Полученные гистограммы приведены ниже.









Хорошо видно, что третья последовательность практически идеально моделирует равномерное распределение на отрезке [0; 1]. Частоты попадания в карманы очень мало отличаются от теоретического значения 10. У первой последовательности чаще встречаются крайние значения (близкие к 0 и 1). У второй последовательности просматривается увеличение частот с приближением к 1.

Пример 99.: Ввести в строку №3 листа последовательность из 10 случайных чисел, имеющих нормальное распределение с математическим ожиданием m=7 и среднеквадратическим отклонением σ =2. В качестве замены СЛЧИС() использовать последовательность $S_n = sin^2(n)$, n=1, 2, …10.

Найти выборочную среднюю $\overline{X}$, и исправленную выборочную дисперсию S_0^2 и расположить их в ячейках B4 и C4 соответственно.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	Sn	0,71	0,83	0,02	0,57	0,92	0,08	0,4	0,98	0,17	0,3
3		8,10	8,88	2,89	7,37	9,80	4,16	6,6	11,0	5,09	5,9
4		6,99	6,56								

Вводим в 1-ю строку номера 10 квазислучайных чисел
Вводим в B2 формулу для получения первого квазислучайного числа =SIN(B1)^2 и копируем вправо.
Вводим в B3 формулу = НОРМОБР(B2; 7; 2). Обращаем внимание на то, что вместо СЛЧИС() используем ссылку на первой квазислучайное число.
Копируем формулу из B3 вправо.
Вводим в B4 формулу: =СРЗНАЧ(B2:K2) (*ответ:* 6,99).
Вводим в C4формулу: =ДИСП(B2:K2) (*ответ:* 6,56).

Эту задачу можно решить, не выводя в отдельную строку квазислучайные числа. Надо сразу записать в B3 формулу = НОРМОБР(SIN(B1)^2; 7; 2) и скопировать вправо.

10.6.Система двух дискретных случайных величин. Коэффициент корреляции

Поставим в соответствие каждому студенту из некоторой совокупности две величины: ξ – время на подготовку к экзамену и η – оценку за экзамен. Вероятностные свойства пары (ξ, η) полностью можно описать таблицей распределения (данные гипотетические)

$x_i \backslash y_j$	2	3	4	5
0	0,10	0,03	0,02	0,01
5	0,05	0,10	0,15	0,05
10	0,01	0,03	0,20	0,25

В первом столбце представлены возможные значения ξ (x_i= 0, 5 и 10 часов), в первой строке – значения η (y_j = 2, 3, 4 и 5), на пересечении строк и столбцов – совместные вероятности (p_{ij}). Например, вероятность того, что студент потратит на подготовку 10 часов и получит при этом оценку, 5 равна 0,25:

$$P(\xi = 10, \eta = 5) = 0{,}25$$

Важнейшей характеристикой системы (ξ, η) двух случайных величин является математическое ожидание их произведения:

$$M(\xi\eta) = \sum_i \sum_j x_i \, y_j p_{ij}$$

По заданной таблице совместных вероятностей можно построить частные таблицы распределения для ξ и η по отдельности:

ξ	0	5	10
	0,16	0,35	0,49

η	2	3	4	5
	0,16	0,16	0,37	0,31

По частным таблицам можно найти математические ожидания и дисперсии для ξ и η. Далее можно вычислить коэффициент корреляции между ξ и η по формуле:

$$r = r(\xi, \eta) = \frac{M(\xi\eta) - M(\xi)M(\eta)}{\sqrt{D(\xi)D(\eta)}}$$

Коэффициент корреляции показывает силу и направление линейной стохастической связи случайных величин и принимает значения из отрезка [–1; 1]. Чем ближе абсолютное значение коэффициента к 1, тем сильнее линейная связь. Если коэффициент равен 0, то линейная связь отсутствует (но может присутствовать нелинейная связь).

Для рассмотренного гипотетического примера коэффициент корреляции между временем на подготовку к экзамену и оценкой равен 0,622.

Пример 100. Величина ξ принимает все целые значения от 1 до 3, η принимает все целые значения от 1 до 4. Совместные вероятности определяются по формуле

$$P(\xi = i, \eta = j) = p_{ij} = \frac{a}{i + 2j}$$

Найти константу a и вычислить математическое ожидание произведения $M(\xi\eta)$.

Решение.

Константу a находим из условия нормировки: сумма всех вероятностей должна равняться 1, т.е.

$$\sum_i \sum_j p_{ij} = 1$$

Заполним таблицу, как показано на рисунке

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	$x_i \backslash y_j$	1	2	3	4		a	сумма
2	1	=$G$2/($A2+2*B$1)					0,5	=СУММ(B2:E4)
3	2	Копируем вниз и вправо						
4	3							

Присвоим ячейке G2 стартовое значение параметра a: 0,5. Запускаем программу ПОИСК РЕШЕНИЯ. Устанавливаем параметры: **целевая ячейка** – H2, **цель** – значение 1, **изменяемая ячейка** – G2. *Ответ*: a = 0,507.

Математическое ожидание произведения определяется по формуле:

$$M(\xi\eta) = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{4} (i \cdot j) \cdot p_{ij} = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{4} (i \cdot j) \cdot \frac{a}{i + 2j}$$

Дополняем формулу в B2 до вида =$A2*B$1*$G$2/($A2+2*B$1)

и копируем вниз и вправо. В ячейке H2 отобразится результат: 3,988. *Ответ*: $M(\xi\eta) = 3{,}988$

10.7. Выборочный коэффициент корреляции. Функция КОРРЕЛ

Пусть изучается система количественных признаков (X, Y). В результате n независимых опытов получены n пар чисел (x_1, y_1), (x_2, y_2),…, (x_n, y_n). Мерой линейной стохастической связи между признаками является выборочный коэффициент корреляции

$$\rho(x,y) = \frac{\overline{XY} - \bar{X}\cdot\bar{Y}}{\sqrt{\left(\overline{X^2} - (\bar{X})^2\right)\left(\overline{Y^2} - (\bar{Y})^2\right)}}$$

Напоминаем, что черта над символом означает усреднение, например:

$$\overline{X^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

Для вычисления выборочного коэффициента корреляции в EXCEL предусмотрена функция КОРРЕЛ.

Пример 101. Построить последовательность из 10 пар (x_i , y_i) случайных чисел по правилу: величина x_i нормально распределена с параметрами m = 50 и σ =4, величина y_i зависит от x_i, а именно, равномерно распределена на отрезке [x_i– 5, x_i+ 5]. Найти значение выборочного коэффициента корреляции.

Решение.

1. Вводим в A1 формулу: =НОРМОБР(СЛЧИС() ; 50 ; 4).
2. Вводим в A2 формулу: =A1–5+10*СЛЧИС() .
3. Копируем A1:A2 вправо на 9 ячеек.
4. Вводим в A3 формулу: =КОРРЕЛ(A1:J1; A2:J2) (рис. 10.7.1).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	51,3	42,7	44,4	46,7	41,0	45,0	54,1	57,9	44,4	52,0
2	50,7	46,8	42,8	49,1	40,5	45,8	49,9	54,2	48,3	57,0
3	0,82									

Рис. 10.7.1

10.8. Построение последовательностей отрицательно коррелированных случайных величин

Для решения этой задачи надо задать такой алгоритм формирования значений, при котором случайные отклонения величин от своих средних значений разнонаправлены: если одна величина отклоняется от своего среднего в большую сторону, то другая, как правило, в меньшую.

Пример 102. Построить последовательность из 10 пар (x_i , y_i) случайных чисел по правилу: величина x_i нормально распределена с параметрами m = 50 и σ = 4, величина y_i зависит от x_i , а именно, равномерно распределена на отрезке [90–x_i;100–x_i]. Найти значение выборочного коэффициента корреляции.

Решение.

1. Вводим в A1 формулу: =НОРМОБР(СЛЧИС(); 50; 4).
2. Вводим в A2 формулу: =90–A1+10*СЛЧИС().
3. Копируем A1:A2 вправо на 9 ячеек.
4. Вводим в A3 формулу: =КОРРЕЛ(A1:J1; A2:J2).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	49,1	49,1	53,3	50,7	51,1	42,7	51,8	51,7	43,1	52,5
2	47,0	45,9	46,3	49,0	47,1	50,1	45,4	42,3	56,1	41,2
3	–0,79									

10.9.Вычисление выборочного коэффициента автокорреляции

Пусть последовательность (процесс) X_i , i=1,2,…, n, представляет собой значения некоторой величины в последовательные моменты времени (например, уровень инфляции в i – м году). Степень влияния текущего значения процесса на его значение в следующий момент времени (или теснота линейной связи соседних по времени значений процесса) оценивается с помощью коэффициента автокорреляции. Выборочный коэффициент автокорреляции – это выборочный коэффициент корреляции между исходной последовательностью и той же последовательностью, сдвинутой по отношению к первой на один номер. Таким образом, сравниваются следующие n-1 пары соседних значений процесса (X_2 и X_1), (X_3 и X_2) , … , (X_n и X_{n-1}).

Пример 103. Для последовательности $X_i = sin(2+i)$, i = 1, 2, … , 10 найти выборочный коэффициент автокорреляции.

Решение.

	A	B	C	D
1	i	X_{i}	$X_{\text{i-1}}$	Коэффициент автокорреляции
2	1	=SIN(2+A2)		=КОРРЕЛ(B3:C11)
3	2	=SIN(2+A3)	=SIN(2+A2)	

1. Вводим в B2 формулу: =SIN(2+A2) и копируем вниз до B11.
2. Вводим в C3 формулу: = SIN(2+A2) и копируем вниз до C11.
3. Вводим в D2 формулу: =. КОРРЕЛ(B3:C11)

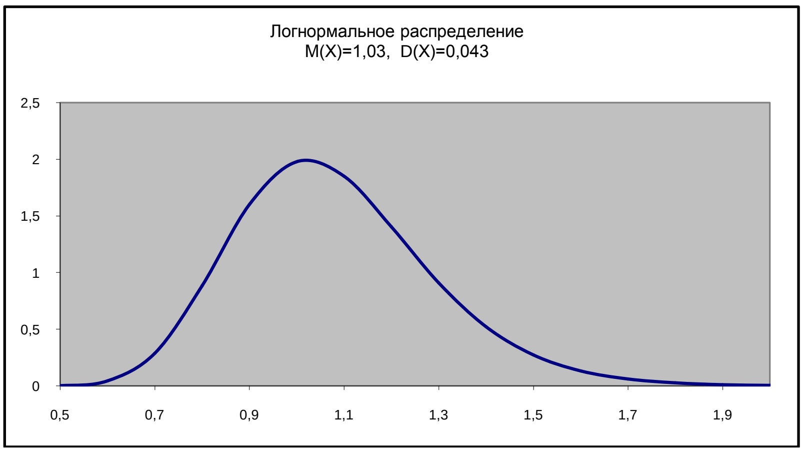
Ответ: 0,542.

10.10.Логарифмически-нормальное распределение. Функция ЛОГНОРМОБР

Случайная положительная непрерывная величина X имеет логарифмически-нормальное (*логнормальное*) распределение, если ее логарифм подчинен нормальному закону. Если при этом математическое ожидание и дисперсия логарифма X равны $\mathrm{M}ln(X) = a$, $\mathrm{D}ln(X)=\sigma^2$, то математическое ожидание и дисперсия самой величины X равны

$$MX = \exp(a + \frac{\sigma^2}{2}),\ \mathrm{D}X = \exp(2a + \sigma^2)\cdot(\exp(\sigma^2) - 1).$$

Числа a и σ называются параметрами логнормального распределения.



На рисунке представлен график плотности логнормального распределения с параметрами a =0,01, σ = 0,2. Логнормальное распределение используется для описания доходов, банковских вкладов, коэффициентов роста стоимости финансовых активов (акций, валюты, драгметаллов).

Для моделирования логнормальных случайных величин используется функция ЛОГНОРМОБР(r ; a; σ), в которой r – случайная величина, равномерно распределена на отрезке [0, 1].

Пример 104. Получить 30 случайных чисел, распределенных по логнормальному закону с параметрами a =0,01, σ=0,2. Построить столбчатую диаграмму по этим числам. Найти среднее значение и исправленную выборочную дисперсию.
Решение.
Заполняем таблицу, как показано на рисунке

	A	B	C
1	X_i	Среднее значение	Исправленная дисперсия
2	=ЛОГНОРМОБР(СЛЧИС();0,01;0,2)	=СРЗНАЧ(A2:A31)	=ДИСП(A2:A31)

Копируем формулу из A2 вниз до 31-й строки

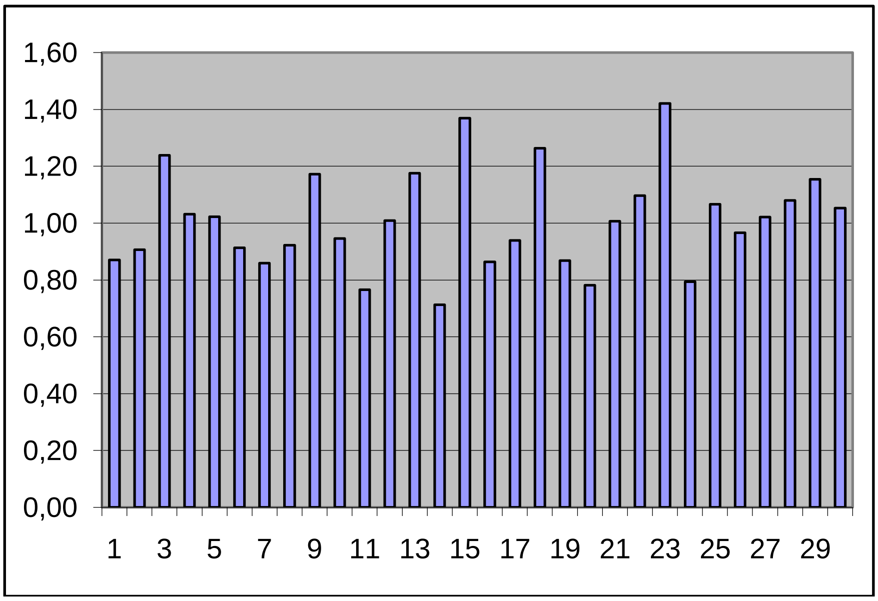


Рис. 10.8.1

Маркируем колонку A и строим диаграмму типа ГИСТОГРАММА (рис. 10.8.1).

Как видно из диаграммы, значения случайной величины колеблются вокруг 1 с разбросом ± 0,4. Полученное среднее значение 1,035 вполне соответствует теоретическому значению 1,030.

Пример 105. Получить 30 квазислучайных чисел, распределенных по логнормальному закону с параметрами a =0,01, σ=0,2. В качестве замены СЛЧИС() использовать последовательность $S_n=sin^2(n^4)$, n=1, 2, …30. Найти исправленную выборочную дисперсию.
*Ответ:*0,140.

10.11. Генерирование зависимых нормально распределенных случайных величин

Пусть пара случайных величин X, Y подчиняется нормальному закону распределения с параметрами *ax*, *sx, ay, sy, ro*, которые имеют следующий смысл:

ax–среднее значение величины X;
sx–среднеквадратическое отклонение величины X;
ay–среднее значение величины Y;
sy–среднеквадратическое отклонение величины Y;
ro–коэффициент корреляции между X и Y.

Алгоритм моделирования пары зависимых нормально распределенных случайных величин X, Y состоит в следующем:

1) Генерируется значение X по формуле: =НОРМОБР(СЛЧИС(); *ax*; *sx*);
2) Полученное значение X используется для вычисления Y по формуле: =НОРМОБР(СЛЧИС(); *ay* + *ro***sy*/*sx**(X–*ax*); *sy**КОРЕНЬ(1–*ro*^2)).

Пример 106. Сгенерировать рост и вес 30 человек, используя следующие значения параметров: *ax*=172см, *sx*=8см, *ay*=73кг, *sy*=7кг, *ro*=0,9.

Решение.

1. Присвоим ячейкам E3, F3, G3, H3, I3 имена, как показано на рис. 10.9.1.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	№	Рост	Вес		Параметры				
2	1	176,2	75,2		AX	AY	SX	SY	RO
3	2	163,4	66,2		172	73	8	7	0,9

Рис. 10.9.1

2. Вводим в ячейку B2 формулу: =НОРМОБР(СЛЧИС(); *ax*; *sx*).

Напоминаем, что ввод в формулу пользовательских имен ячеек лучше всего производить с помощью клавиши F3.

3. Далее вводим в ячейку C2 формулу:
=НОРМОБР(СЛЧИС(); *ay*+*ro***sy*/*sx**(B2–*ax*); sy*КОРЕНЬ(1–*ro*^2)).
4. Копируем формулы из B2,C2 вниз до 31-й строки.
5. Вводим в B32 формулу: =СРЗНАЧ(B2:B31).
6. Копируем формулу из B32 в C32.
7. Маркируем диапазон B1:C32 и строим диаграмму типа ТОЧЕЧНАЯ.

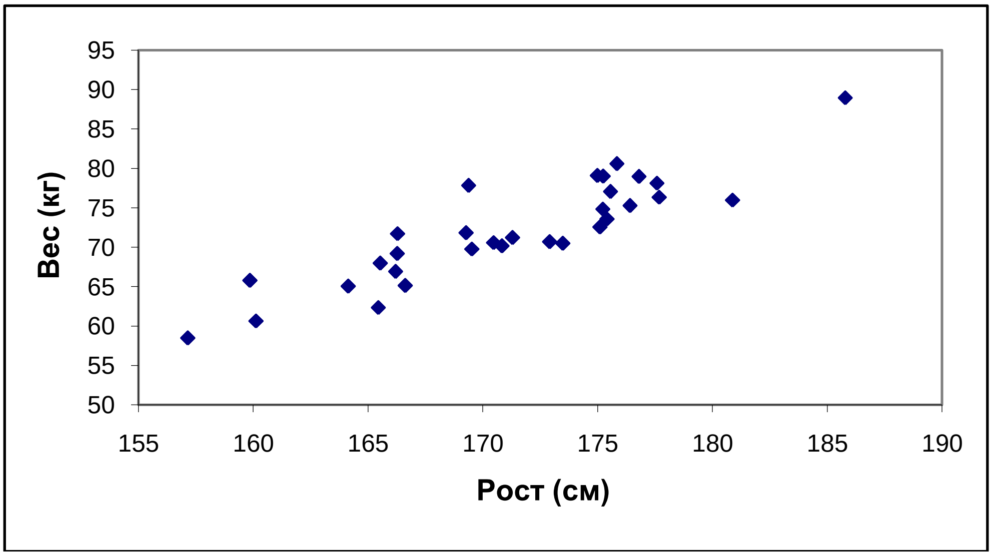
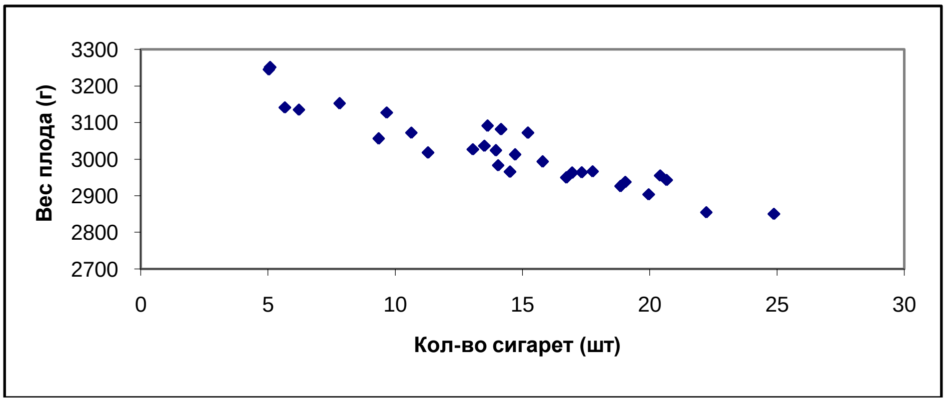


Рис. 10.9.2

Полученный график называется диаграммой рассеяния. Хорошо видно, что сгенерированные точки образуют достаточно узкую полосу, вытянутую вдоль возрастающей прямой. Это говорит о том, что между X и Y имеется сильная линейная зависимость, причем эта зависимость имеет положительный характер. Чем больше рост X, тем больше вес Y. Сильная положительная зависимость обусловлена большим положительным значением коэффициента корреляции *ro*=0,9.

Пример 107. Сгенерировать 30 пар чисел (X, Y), если X (число сигарет, выкуриваемых женщиной во время беременности) и Y (вес новорожденного плода) распределены по нормальному закону с параметрами: *ax* =15 шт.; *sx* =5 шт.; *ay* =3000 г; *sy* =100 г; *ro* = – 0,9.



На рисунке хорошо просматривается тесная отрицательная зависимость между рассматриваемыми величинами (чем больше выкуривается сигарет, тем меньше вес новорожденного).

Пример 108. Сгенерировать 30 пар чисел X, Y, если X (коэффициент интеллектуальности IQ студента) и Y (вес студента) распределены по нормальному закону с параметрами: *ax* =100; *sx* =25; *ay* =70 кг; *sy* =6 кг; *ro* =0.
Построить диаграмму рассеяния.

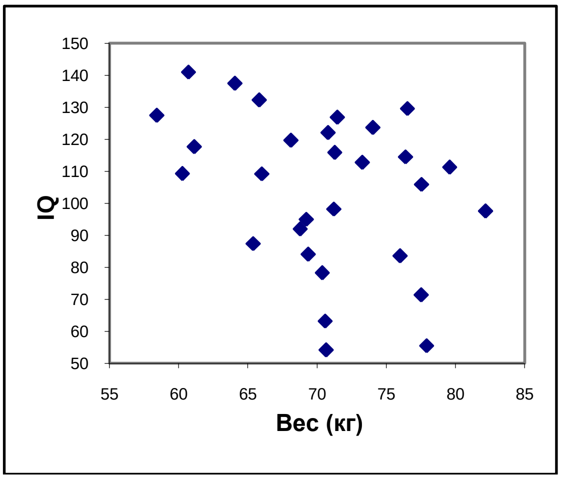


Рис. 10.9.4

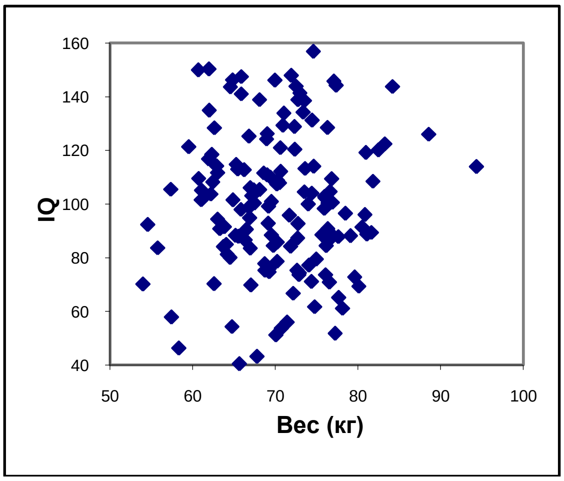


Рис. 10.9.5

Рис. 10.9.4 является иллюстрацией отсутствия связи между случайными величинами X и Y. Область рассеяния напоминает круг. Нет и намека на то, чтобы сгенерированные точки выстраивались вдоль какой-нибудь прямой линии. На рис. 10.9.5 представлена диаграмма рассеяния для 150 пар X, Y.

Пример 109. Сгенерировать 25 пар чисел X, Y, если X (время, потраченное студентом на подготовку к экзамену по информатике) и Y (оценка за экзамен) распределены по нормальному закону с параметрами: *ax* =12 час.; *sx* =3,5 час.; *ay* =3,6 балла; *sy* =0,7 балла; *ro* =0,85. Построить диаграмму рассеяния. Предусмотреть округление оценок до целых значений и ограничение их диапазоном [2;5]. Рекомендуется использовать функции ОКРУГЛ(Y; 0) и МАКС(2,Y) и МИН(5,Y). Построить диаграмму рассеяния для этого случая.

10.12. Моделирование генеральной совокупности и выборочного метода. Функция СУММКВРАЗН

Пусть в некотором избирательном округе зарегистрировано N = 1000 избирателей. Промоделируем результаты голосования, предположив следующее вероятностное распределение предпочтений избирателей.

Голосует	Против всех	За партию синих	За партию красных	За партию зеленых
Код	0	1	2	3
Вероятность	0,1	0,4	0,3	0,2

Заполним ячейки, как показано ниже (в A2:C5 коды и вероятности):

	A	B	C	D	E	F
1			Генеральная совокупность	Карман	Частота	Относительная частота
2	0	0,1				E2/1000
3	1	0,4				
4	2	0,3				
5	3	0,2				

	G	H	I	J	K	L	M	N
1	**Выборка, каждый 20-й**	**Карман**	**Частота**	**Относительная частота**	**Выборка, каждый 10-й**	**Карман**	**Частота**	**Относительная частота**
2				I2/50				M2/100
3								
4								
5								

Используем программу ДАННЫЕ, АНАЛИЗ ДАННЫХ, ГЕНЕРАЦИЯ СЛУЧАЙНЫХ ЧИСЕЛ. Установим параметры:

число переменных 1 (число столбцов, в которые будут выводиться значения)
число случайных чисел 1000 (количество чисел в столбце)
распределение дискретное
входной интервал значений и вероятностей A2:B5
выходной интервал C2 (начальная ячейка интервала)

В диапазон C2:C1001 будут выведены гипотетические результаты голосования. Эти 1000 чисел представляют собой генеральную совокупность –множество числовых значений (кодов выбора) всех избирателей исследуемого округа.

Выборочной совокупностью или выборкой называется множество числовых значений (кодов выбора) части избирателей, случайным образом отобранных из всей генеральной совокупности.

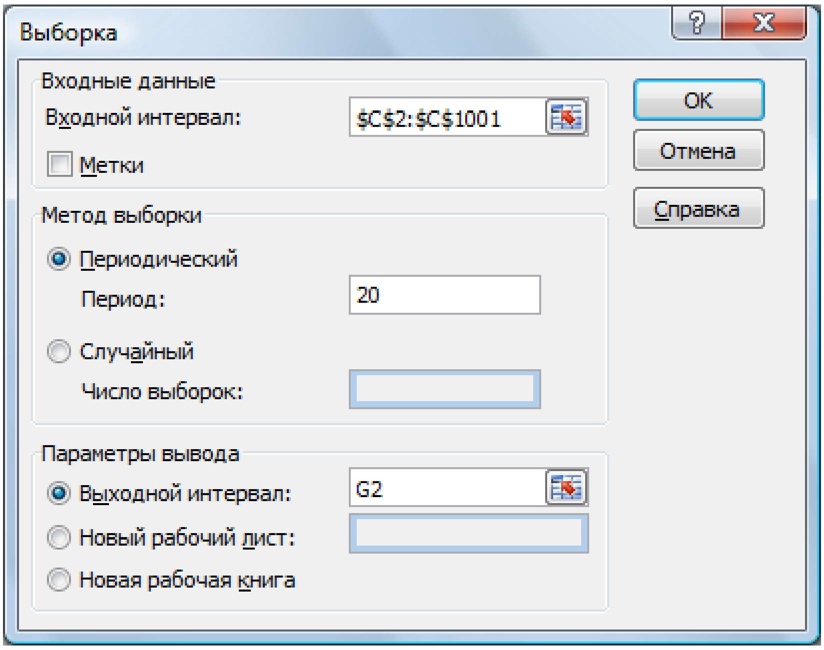
Посмотрим, насколько сильно отличаются относительные частоты кодов выбора в генеральной совокупности и в выборках разного объема (5%, 10%). В качестве меры различия используем сумму квадратов разностей соответствующих частот.

Организуем процесс выборки из генеральной совокупности с помощью цепочки ДАННЫЕ, АНАЛИЗ ДАННЫХ, ВЫБОРКА.

Вводим в поля диалога ВЫБОРКА данные:

Входной интервал: **C2:C1001**

Метод выборки: **периодический** с периодом **20** (берется каждое 20 – е число, что соответствует 5% – й выборке)



Ввод входного интервала осуществляем так:
активизируем поле ввода щелчком мыши, щелкаем по ячейке C2 (в поле ввода отобразится C2), нажимаем CTRL+SHIFT+↓. Выборка будет помещена в диапазон G2:G51.

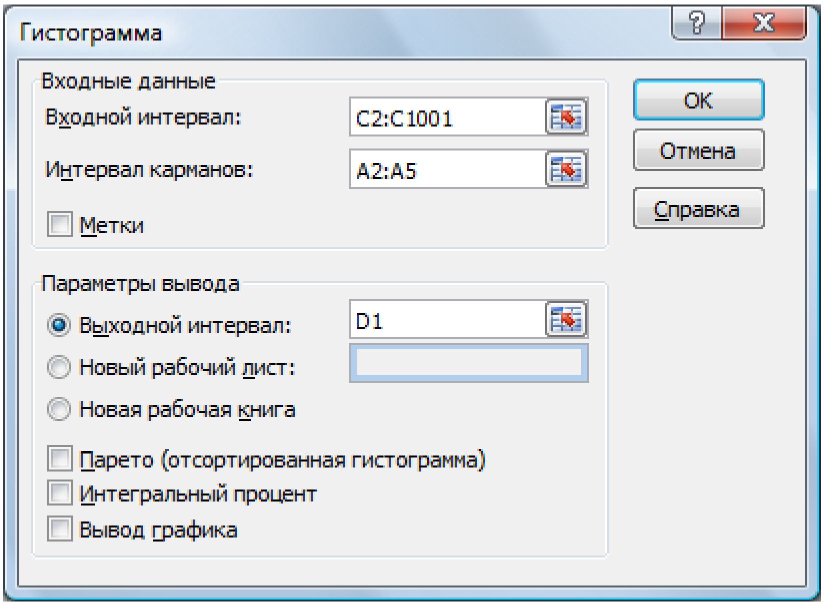
Организуем процесс 10% – й выборки, задав в диалоге ВЫБОРКА следующие параметры:

входной интервал	C2:C1001
период	10
выходной интервал	K2

Итак, получено 3 последовательности чисел: генеральная совокупность –1000 чисел, выборка 5% – 50 чисел, выборка 10% – 100 чисел. Найдем для каждой последовательности таблицу (гистограмму) частот.

Частоты для генеральной совокупности:

Реализуем цепочку: вкладка ДАННЫЕ, группа АНАЛИЗ ДАННЫХ, строка списка ГИСТОГРАММА. Заполняем поля ввода, как показано на рисунке. Напоминаем, что диапазон C2:C1001 вводим комбинацией CTRL+SHIFT+↓.



Частоты для 5% - й выборки:
В диалоге ГИСТОГРАММА устанавливаем параметры:

входной интервал	G2:G51
интервал карманов	A2:A5
выходной интервал	H1

Частоты для 10% - й выборки:
В диалоге ГИСТОГРАММА устанавливаем параметры:

входной интервал	K2:K101
интервал карманов	A2:A5
выходной интервал	L1

Вводим в формулы для вычисления относительных частот в ячейки F2, J2, N2 и копируем их вниз. Для сравнения относительных частот используем функцию СУММКВРАЗН. Для 5% выборки вводим в J7 формулу: =СУММКВРАЗН(F2:F5; J2:J5), для 10% выборки вводим в N7 формулу: = СУММКВРАЗН(F2:F5; N2:N5).
В момент расчетов были получены следующие результаты (рис. 8.9.1).

	A	F	J	N
1	Код выбора	Генеральная совокупность	Выборка 5%	Выборка 10%
2	0	0,102	0,04	0,09
3	1	0,406	0,52	0,42
4	2	0,284	0,26	0,28
5	3	0,208	0,18	0,21
6				
7		Мера отличия	0,0182	0,00036

Рис. 8.9.1

Результаты подтверждают теорию: чем больше объем выборки, тем точнее она отражает свойства всей генеральной совокупности. Мера отличия 10% выборки от генеральной совокупности в 50 раз меньше, чем то же самое для 5% выборки.

10.13. Графики функций распределения и плотностей. Функции ХИ2РАСП, FРАСП, СТЬЮДРАСП

Пусть ξ – некоторая случайная величина, $F_\xi(x)$ – ее функция распределения, $f_\xi(x)$ – ее плотность. По определению значение функции распределения в точке x равно вероятности того, что случайная величина примет значение меньшее, чем x, т.е.

$$F_\xi(x) = P(\xi < x).$$

Плотность распределения равна производной функции распределения:

$$f_\xi(x) = \frac{dF(x)}{dx}.$$

В математической статистике часто используются распределения ХИ-квадрат, Фишера и Стьюдента. Характеристики этих распределений находятся с помощью функций Excel ХИ2РАСП, FРАСП и СТЬЮДРАСП.

Обозначим:

$\chi^2(3)$ – случайная величина, распределенная по закону ХИ-квадрат с 3-мя степенями свободы;

$t(7)$ – случайная величина, распределенная по закону *Стьюдента* с 7-ю степенями свободы.

$F(5, 9)$ – случайная величина, распределенная по закону *Фишера с* (К1=5, К2=9) степенями свободы;

Так как $F(5;9) = \frac{\chi^2(5)/_5}{\chi^2(9)/_9}$, то иногда говорят, что К1 = 5 – число степеней свободы числителя, К2 = 9 – число степеней свободы знаменателя.

Для любых неотрицательных значений x справедливы равенства:

ХИ2РАСП(x, 3) = $P(\chi^2(3) > x)$;

FРАСП(x; 5; 9) = $P(F(5, 9)) > x)$;

СТЬЮДРАСП(x, 7, 1)= $P(t(7) > x)$,

где параметр 7 – число степеней свободы, 1 – количество «хвостов». Вместо 1 допускается также 2.

Рассмотренные функции определяют вероятность того, что значение случайной величины большее, чем заданное значение x.

Пример 110. Найти вероятность того, что случайная величина $\chi^2(3)$ примет значение в интервале (2; 4).

Решение. $P(2 < \chi^2(3) < 4)$ = ХИ2РАСП(2, 3) – ХИ2РАСП(4, 3).

Пример 111. Построить график функции распределения и плотности для случайной величины $\chi^2(3)$. Отрезок табулирования [0; 5], шаг – 0,1.

Решение.

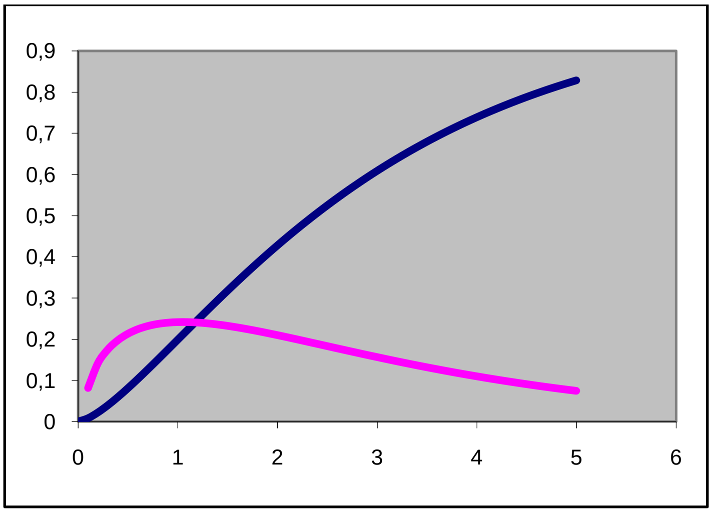
Значение функции распределения в точке x по определению равно вероятности того, что случайная величина примет значение меньшее, чем x, т.е.

$$F(x) = P(\chi2(3) < x) = 1 - P(\chi2(3) > x) = 1 - \text{ХИ2РАСП}(x, 3).$$

Вводим данные в столбцы A, B и C, как показано на рисунке. Для построения графика плотности воспользуемся приближенным дифференцированием “назад”.

	A	B	C	D
1	x	F(x)	f(x)	
2	0	=1–ХИ2РАСП(A2; 3)		
3	0,1	=1–ХИ2РАСП(A3; 3)	=(B3–B2)/0,1	

По графику видно, что плотность распределения унимодальна, т.е. имеет одну точку максимума.

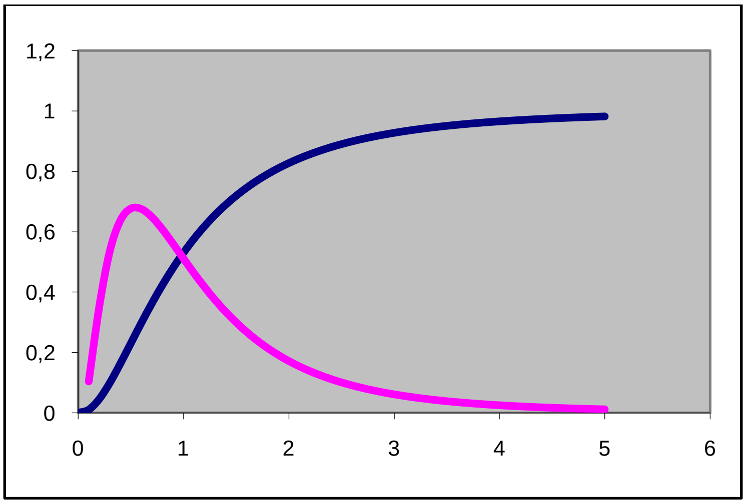


Пример 112. Построить график функции распределения и плотности распределения для случайной величины *F*(5, 9) – распределение *Фишера с* (К1=5, К2=9) степенями свободы. Отрезок табулирования [0; 5], шаг – 0,1. Оценить визуально моду.

	A	B	C	D
1	x	F(x)	f(x)	
2	0	=1–FРАСП(A2; 5; 9)		
3	0,1	=1–FРАСП(A3; 5; 9)	=(B3–B2)/0,1	

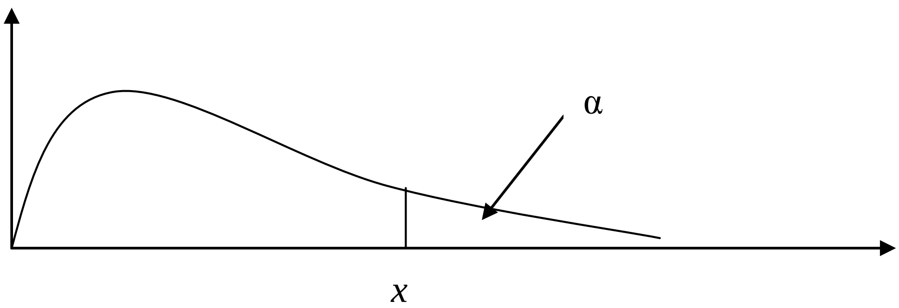
Решение представлено на рисунке. Для получения плотности также используем приближенное дифференцирование “назад”

По графику видно, что мода находится в окрестности числа 0,5



10.14.Нахождение критических точек распределений. Функции ХИ2ОБР, СТЬЮДРАСПОБР, FРАСПОБР

Пусть ξ – некоторая случайная величина и задана вероятность α. Значение x , удовлетворяющее уравнению $P(\xi > x) = \alpha$, называется критической точкой порядка α.



На рисунке представлена функция плотности случайной величины ξ . Точка (значение) x отсекает «правый хвост» плотности так, что площадь этого «хвоста» равна заданной вероятности α. Таким образам, вероятность попасть в область, находящуюся правее точки x, равна α .

Пример 113. Найти критическую точку порядка 0,05 распределения ХИ-квадрат с 3-мя степенями свободы.

Решение.

Так как $P(\chi^2(3) > x)$ = ХИ2РАСП(x; 3), будем искать x, при котором значение функции ХИ2РАСП будет равно 0,05. Решаем уравнение ХИ2РАСП(x; 3)=0,05. Заполним ячейки, как показано на рисунке. В ячейках A1 и B1 – поясняющий текст, в A2 – стартовое значение изменяемой ячейки, в B2 – целевая функция.

	A	B	C	D
1	x	$P(\chi^2(3) > x)$	x	P(F(3;5) > x)
2	1	=ХИ2РАСП(A2; 3)	1	=FРАСП(C2; 3; 5)
3				

Вызываем ПОИСК РЕШЕНИЯ и устанавливаем параметры:

целевая ячейка – B2, **цель поиска** – значение 0,05

изменяемая ячейка – A2, **ограничение –** A2>=0. *Ответ:* 7,81.

Этот же результат можно получить **быстрее** с помощью функции ХИ2ОБР(вероятность; число степеней свободы): ХИ2ОБР(0,05; 3).

Пример 114. Найти критическую точку порядка 0,025 распределения Фишера с (3; 5) степенями свободы.

Решение.

Так как $P(F(3;5) > x)$ = FРАСП(x; 3; 5), будем искать x, при котором значение функции FРАСП будет равно 0,025.

Ответ: 7,76.

Этот же результат можно получить быстрее с помощью функции FРАСПОБР (вероятность; число степеней свободы К1; число степеней свободы К2).

Короткое решение: FРАСПОБР(0,025; 3; 5)

Пример 115. Найти критическое значение порядка 0,005 для двухсторонней области распределения Стьюдента с 7-ю степенями свободы, т.е. решить уравнение $P(t(7) > x) + P(t(7) < -x) = 0{,}005$.

Решение.

Так как P(t(7) > *x*) + P(t(7) < – *x*) = СТЬЮДРАСП(*x*; 7; 2) (третий аргумент количество «хвостов» – равен 2), будем искать *x*, при котором значение функции СТЬЮДРАСП(*x*; 7; 2) будет равно 0,005.

Ответ: 4,03.

Короткое решение: СТЬЮДРАСПОБР(0,005;7).

Пример 116. Найти одностороннюю критическую точку порядка 0,005 распределения Стьюдента с 7-ю степенями свободы.

Решение.

Так как P(t(7) > *x*) = СТЬЮДРАСП(*x*; 7; 1), будем искать *x*, при котором значение функции СТЬЮДРАСП будет равно 0,005.

Ответ: 3,50.

Короткое решение: СТЬЮДРАСПОБР(2*0,005;7)

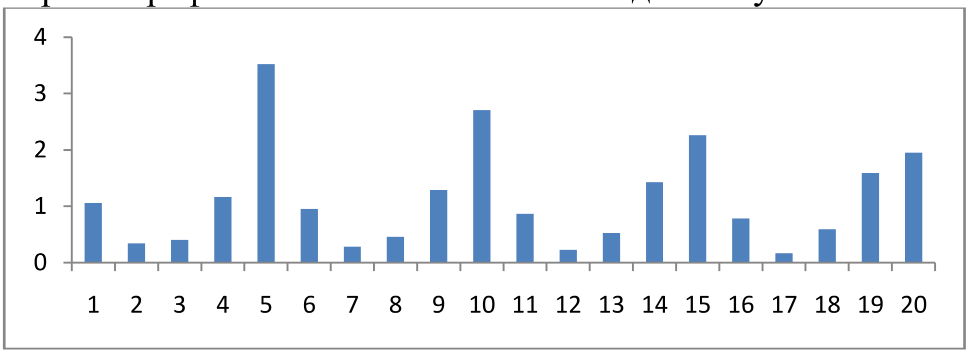
Пример 117. Сгенерировать 20 квазислучайных чисел, имеющих распределение Фишера с (3; 15) степенями свободы. В качестве СЛЧИС() использовать $S_n=0{,}31 arccos(cos(5n))$. Построить график. Найти выборочную среднюю и дисперсию.

Решение. Строим последовательность по формуле

A_n= FРАСПОБР(S_n; 3; 15), n = 1, 2, … ,20, т.е.

A_n= FРАСПОБР(0,31*ACOS(COS(5*n)); 3; 15), n = 1, 2, … ,20

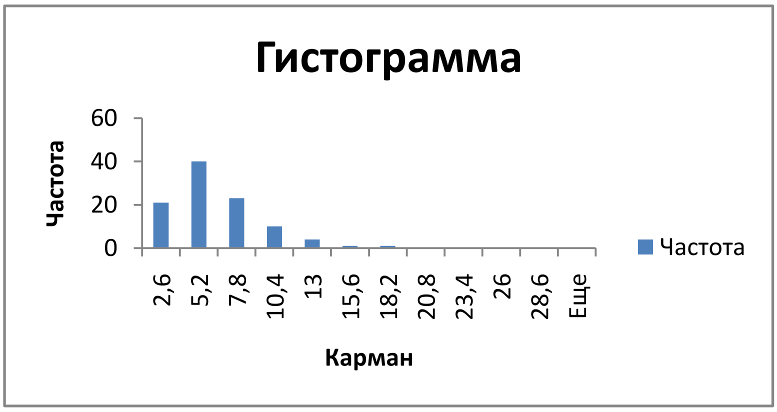
Строим график типа ГИСТОГРАММА для полученной последовательности.



Выборочные средняя и дисперсия равны 1,128 и 0,813.

Пример 118. Сгенерировать 100 квазислучайных чисел, имеющих распределение ХИ-квадрат с 5-ю степенями свободы. В качестве СЛЧИС() использовать $S_n=0{,}31 arccos(cos(n))$. Построить гистограмму (границы карманов не задавать).

Решение. Строим последовательность по формуле

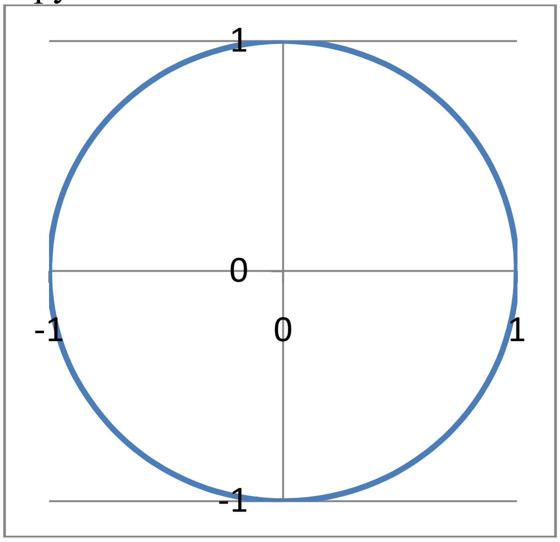


A_n= ХИ2ОБР(S_n; 5), n = 1, 2, … , 100.

Вызываем программу ДАННЫЕ, АНАЛИЗ ДАНЫХ, ГИСТОГРАММА. Границы карманов не задаем, EXCEL это сделает самостоятельно.

§ 11. Метод Монте – Карло

Рассмотрим задачу из курса теории вероятностей. В квадрат со стороной 2 вписана окружность радиуса 1. В квадрат наудачу бросается точка. Найти вероятность P того, что точка попадет в круг.



Искомая вероятность вычисляется по формуле геометрической вероятности

$$P = \frac{\text{площадь круга}}{\text{площадь квадрата}} = \frac{\pi \cdot 1^2}{2^2} = \frac{\pi}{4}$$

Предположим, что проводится N опытов по бросанию точки в квадрат. Обозначим M число попаданий в круг. Величина

$$\mu(N) = \frac{M}{N}$$

называется частотой попаданий в круг.

При большом числе опытов частота будет приближаться к вероятности P:

$$\mu(N) \to \frac{\pi}{4}$$

Другими словами, при большом N справедливо приближенное равенство

$$\mu(N) \approx \frac{\pi}{4}$$

Отсюда следует формула для приближенного нахождения числа π

$$\pi \approx 4 \cdot \mu(N)$$

Например, пусть в некоторой серии из 10 бросаний в квадрат в круг попали 8 точек. Частота попадания равна 8/10. Оценка для $\pi \approx 4 \cdot \frac{8}{10} = 3{,}2$.

Метод Монте – Карло состоит в математическом моделировании серии одинаковых опытов со случайными исходами и получении частоты наступления некоторого события. Эта частота затем используется для получения оценок.

Приведем пример реализации метода для рассмотренного выше приближенного вычисления числа π.

Случайное бросание точки в квадрат эквивалентно розыгрышу двух случайных координат: x – абсциссы и y – ординаты точки. Обе координаты имеют равномерное распределение на отрезке [-1; 1]. Если $x^2 + y^2 \leq 1$, точка попала в круг.

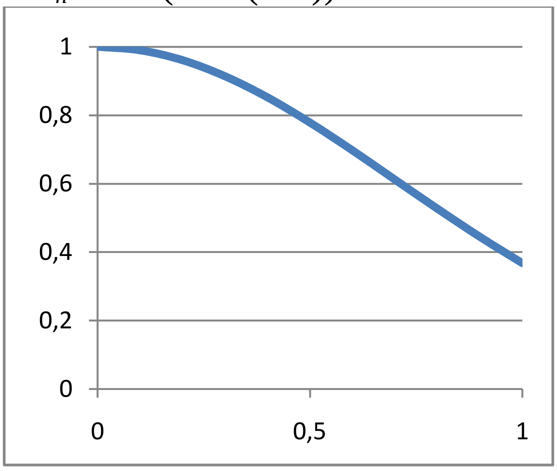
Пусть ставится задача провести N=100 опытов. Заполним таблицу, как показано ниже:

	A	B	C	D
1	n	X	Y	I
2	1	=-1+2*СЛЧИС()	=-1+2*СЛЧИС()	=ЕСЛИ(B2^2+C^2<=1;1;0)
3	2			
4	3			

В столбец A вводим номера точек от 1 до 100.
В ячейки B2, C2 вводим формулу для получения случайных координат.
В ячейку D2 вводится индикатор попадания в круг.
В ячейку E2 вводим число попаданий в круг: =СУММ (D2:D101).
В ячейку F2 вводим частоту попаданий в круг = E2/100.
В ячейку G2 вводим оценку для π: = F2*4.

Пример 119. Получить оценку для числа π, проведя 100 опытов. В качестве СЛЧИС() использовать квазислучайные последовательности для *x*: S_n=ABS(SIN(*n*)), для *y*: S_n=ABS(COS(*n*)).
Ответ: 2,440.

Пример 120. Получить методом Монте – Карло оценку для интеграла $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx$. Число опытов *N*=100. Квазислучайные последовательности для *x*: S_n=ABS(SIN(*n*^2)), для *y*: S_n=ABS(COS(*n*^3)).



Решение. С геометрической точки зрения, значение этого интеграла равно площади криволинейной трапеции, ограниченной сверху графиком функции $y = e^{-x^2}$(см. рисунок). Максимальное значение подынтегральной функции равно 1 (при *x*=0). Т.е. при 0<=*x*<=1 справедливо неравенство 0<= *y*<=1. Для оценки площади разыграем 100 бросаний точки в квадрат 1х1 и найдем $\mu(100)$ – частоту попаданий в область, расположенную под графиком подынтегральной функции. Эта частота и будет искомой оценкой, так как вероятность попадания в область под кривой равна

$$P = \frac{\text{площадь под кривой}}{\text{площадь квадрата 1x1}} \approx \mu(100)$$

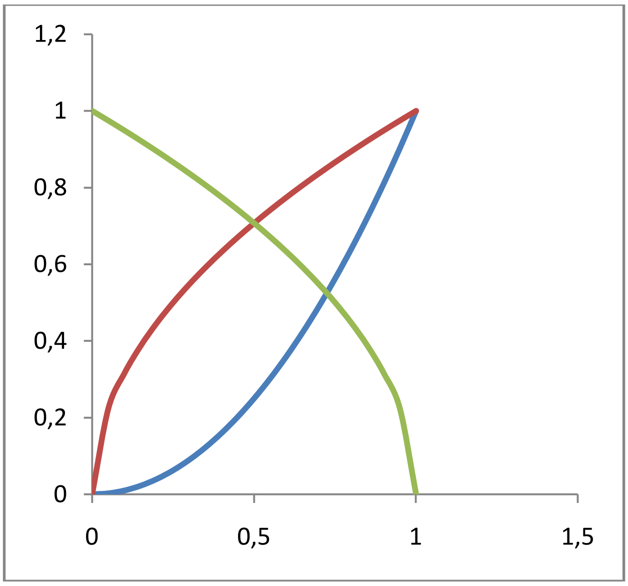
В таблице показаны нужные формулы для проведения эксперимента с датчиками случайных чисел:

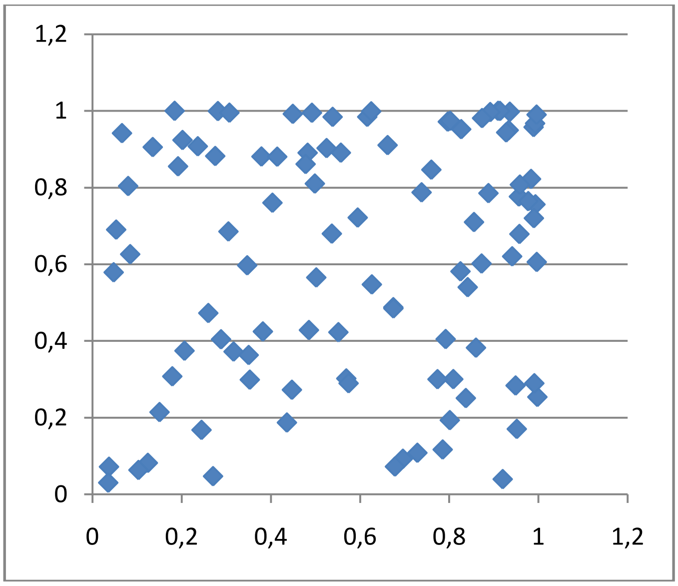
	A	B	C	D
1	n	X	Y	I
2	1	=СЛЧИС()	=СЛЧИС()	=ЕСЛИ(C2<=EXP(-(B2^2); 1; 0)
3	2			

Для квазислучайной имитации формулы в B2 и C2 видоизменяются:

	A	B	C	D
1	n	X	Y	I
2	1	=ABS(SIN(A2^3))	=ABS(COS(A2^2))	=ЕСЛИ(C2<=EXP (-(B2^2); 1; 0)
3	2			

Пример 121. Получить методом Монте – Карло оценку для площади фигуры, ограниченной графиками функций $y = \sqrt{x}, y = \sqrt{1-x}, y = x^2$ на отрезке [0; 1]. Число опытов *N*=100. Квазислучайные последовательности для *x*: S_n=ABS(SIN(*n*^2)), для *y*: S_n=ABS(COS(*n*^4)).





Решение. Графики функций, задающих нужную фигуру, представлены на рисунке. Координаты точек (x^*, y^*) заданной фигуры удовлетворяют системе неравенсв

$$y^* < \sqrt{x^*},\ y^* < \sqrt{1-x^*},\ y^* > (x^*)^2$$

	A	B	C	D
1	n	X	Y	I
2	1	=ABS(SIN(A2^2))	=ABS(COS(A2^4))	=ЕСЛИ(И(C2<КОРЕНЬ(B2); C2<КОРЕНЬ(1-B2); C2>B2^2); 1; 0)
3	2			

Результат квазислучайного бросания точек в квадрат 1Х1 представлен на рисунке. Число точек, попавших внутрь фигуры, равно 13. Всего 100 точек. Оценка для площади фигуры 0,13.

§ 12. Математическое ожидание и дисперсия непрерывной случайной величины (на примере бета-распределения)

При оценивании случайной длительности выполнения работ (операций, проектов) эксперты называют три числа:

a – наименьшее прогнозируемое время выполнения (оптимистическое),

b – наибольшее прогнозируемое время выполнения (пессимистическое),

m – самое вероятное время выполнения.

Распространенной моделью длительности операций является случайная величина t, имеющая бета-распределение с функцией плотности:

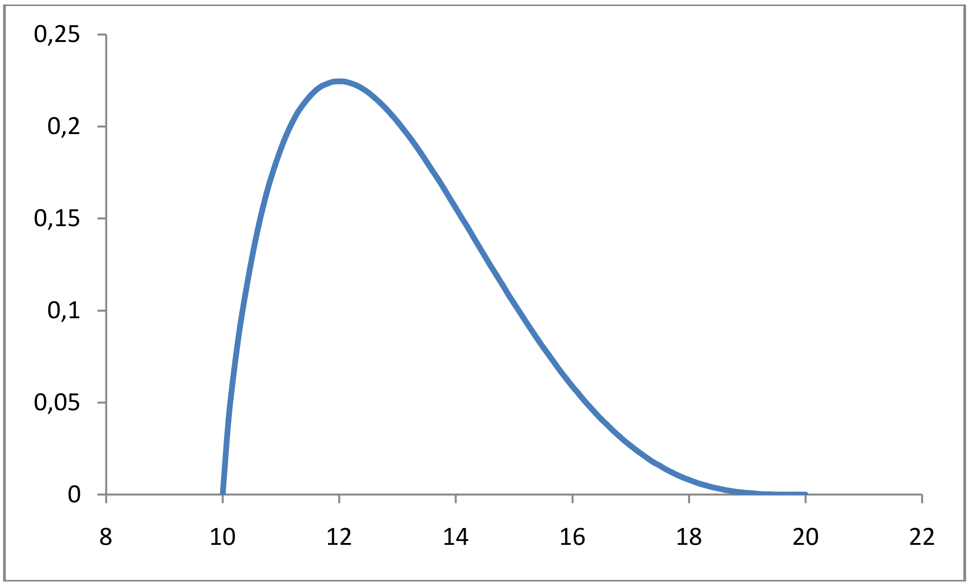
$$p(x) = \begin{cases} C \cdot \left((x-a)^{m-a}(b-x)^{b-m}\right)^{\frac{4}{b-a}} & \text{при } x \in [a;b] \\ 0 \ \text{при } x \notin [a;b] \end{cases}$$

Характеристики этого распределения в точности соответствуют смыслу параметров a, b, m, а именно: величина t принимает значения только из отрезка $[a, b]$, а максимум плотности достигается при $x = m$. Математическое ожидание вычисляется по точной формуле:

$$\bar{t} = \frac{a+4m+b}{6},$$

а дисперсия по приближенной формуле:

$$\sigma^2 \approx \left(\frac{b-a}{6}\right)^2.$$



Пример 122. Для параметров a =10, b =20, m=12:

1) найти нормирующую константу С (приближенное интегрирование с шагом табулирования, равным 0,1)

2) построить график плотности с найденной константой.

оценить с помощью приближенного интегрирования среднее значение и дисперсию.

3) сравнить найденные значения с теоретическими.

Решение: Табулируем функцию $(x-10)^{0,8}(20-x)^{3,2}$ и находим интеграл по формуле левых прямоугольников

$$\int_{10}^{20} (x-10)^{0,8}\,(20-x)^{3,2}dx$$

Ответ: 6017,32

Из условия нормировки (площадь под графиком плотности должна равняться единице) константа равна С = 1/6017,32

Корректируем столбец с протабулированными значениями функции, умножая его на константу С. Строим точечный график.

Находим математическое ожидание, оценивая интеграл:

$$M(t) = C\int_{10}^{20} x(x-10)^{0,8}\,(20-x)^{3,2}dx$$

Ответ: 13,002 (теоретическое значение $\frac{10+4*12+20}{6} = 13$)

Оцениваем интеграл

$$M(t^2) = C\int_{10}^{20} x^2(x-10)^{0,8}\,(20-x)^{3,2}dx$$

И находим дисперсию по формуле

$$D(t) = \sigma^2 = M(t^2) - (M(t))^2$$

Ответ: 2,997.

Упражнение. Для параметров бета-распределения a =5, b =15, m=10 найти C, математическое ожидание и дисперсию. Шаг табулирования сделать равным 0,25. Ответ: C=1/3333,332; $M(t)$ = 10, $D(t)$=3,571

§ 13. Коэффициент ранговой корреляции. Функции СЛУЧМЕЖДУ, РАНГ.

Пусть судья оценивает выступление 5 спортсменов, выставляя им баллы от 0 до 100. На основе этих баллов подсчитываются места спортсменов (первое место соответствует самому высокому баллу). Перевод баллов в места можно осуществить с помощью функции РАНГ(*число*; *массив*), где *число* – число, для которого определяется ранг, *массив* – ссылка на массив чисел, с которыми сравнивается *число*.

Пусть судья поставил баллы, указанные на рисунке.

	A	B	C
1	Номер спортсмена	Балл	Место (ранг)
2	1	35	=РАНГ(B2; $B$2:$B$6)
3	2	56	Копируем вниз
4	3	18	
5	4	85	
6	5	45	

Вводим в С2 функцию РАНГ, не забыв при этом ссылку на массив сделать абсолютной. Это нужно для последующего корректного копирования формулы вниз. Результатом будут места (4, 2, 5, 1, 3).

Когда в оценивании принимают участие двое судей, представляет интерес вопрос, насколько близки их мнения. Если мнения близки, значит, или оба судьи весьма квалифицированны и ставят объективные оценки спортсменам, или выступления спортсменов настолько разные по классу, что не требуется большой квалификации для их правильного ранжирования. В качестве меры близости (согласованности) мнений часто используют коэффициент ранговой корреляции Спирмена.

Коэффициент вычисляется по формуле

$$\rho = 1 - \frac{6 \cdot \sum d_i^2}{n(n^2 - 1)}$$

Здесь n –число спортсменов, d_i разность мест проставленных i – му спортсмену судьями.

Найдем, к примеру, коэффициент Спирмена для данных на рисунке.

Спортсмен	1 судья	2 судья	Разность мест
1	4	3	1
2	2	1	1
3	5	4	1
4	1	2	-1
5	3	5	-2

Сумма квадратов разностей мест равна 8. Число спортсменов 5. Коэффициент Спирмена равен

$$\rho = 1 - \frac{6 \cdot 8}{5(5^2 - 1)} = 0{,}4$$

Коэффициент Спирмена может принимать значения от -1 до 1. При полном согласии он равен 1 (сумма квадратов разностей мест равна нулю).

Пример 123. Исследовать поведение коэффициента Спирмена в предположении, что оба судьи принимают решение не на основе качества выступления спортсменов, а с помощью датчика случайных чисел.

Пусть количество спортсменов равно 5. Каждый судья выставляет баллы случайным образом с помощью функции СЛУЧМЕЖДУ(1;100). Выставленные баллы ранжируются с помощью функции РАНГ.

Требуется получить 10 значений коэффициента Спирмена. При написании этого пособия были получены значения 0,5, -0,4, -0,9, 0,35,-0,65, 0,2, 0,9, -0,7, -0,25. Среднее значение полученных чисел близко к нулю. Несмотря на случайность выставления баллов в одной из реализаций было получено очень высокое значение коэффициента совпадения (0,9).

Проделаем ту же процедуру для 20 спортсменов 40 раз. Значения коэффициента стали существенно меньше (-0,04, 0,18, 0,1, -0,26,-0,22 и т.д.), а дисперсия существенно уменьшилась по сравнению с предыдущим опытом.

Результаты объясняются тем что, при малом количестве оцениваемых объектов (спортсменов) вероятность совпадения или близости случайно проставленых мест достаточно большая (мало вариантов), и поэтому в первой серии экспериментов один раз коэффициент совпадения был 0,9.

При большом же числе оцениваемых объектов вероятность случайного совпадения или близости проставленных мест очень мала (большое число вариантов) и поэтому даже при 40 имитациях коэффициент совпадения ни разу не преввысил значения 0,5.

Заметим, что в случае 5 спортсменов вероятность того, что случайно проставленные места полностью совпадут, равна 1/120. А в случае 20 спортсменов эта вероятность равна 1/20!, что приблизительно равно 10^{-19}.

Упражнение. Вычислить коэффициент Спирмена для следующих данных. Число спортсменов 20. Первый судья выставляет i – му спортсмену квазислучайный балл, равный 100*SIN(*i*)^2, второй судья выставляет квазислучайный балл 100*SIN(*i*^2)^2. *Ответ:*0,084.

§ 14. Построение линий тренда и прогнозирование

Прогнозирование на основе тренда использует следующую модель:

$$Y_t = F(t) + \varepsilon,$$

Здесь Y_t – реальное значение процесса в момент времени t ,
ε – ошибка (погрешность);
F(t) – теоретическая функция из некоторого класса, параметры которой находятся из условия минимизации ошибок.

Функция *F(t)* называется трендом. Чтобы спрогнозировать значение процесса в грядущий момент времени *T*, значение *T* подставляют в найденную функцию. Величина *F(T)* и принимается в качестве прогнозной.

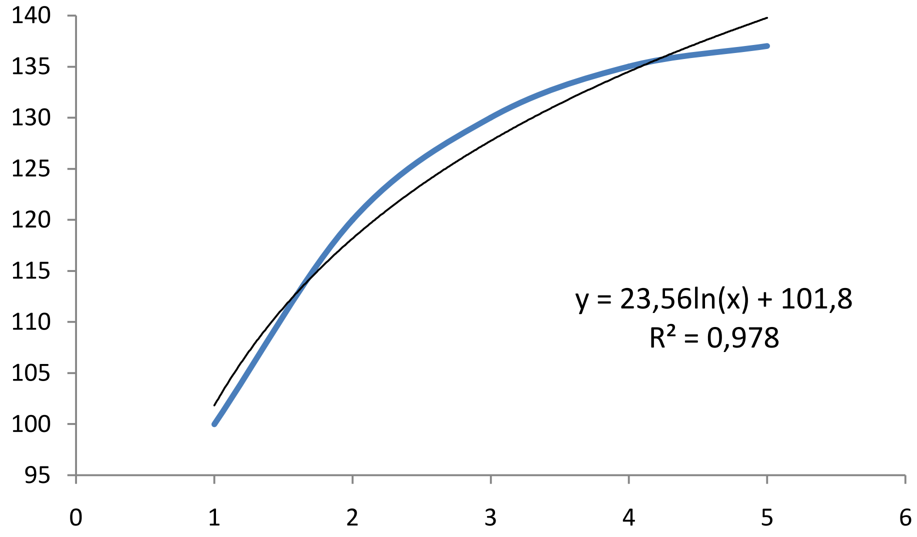
Приведем некоторые классы функций, используемые при прогнозировании:
Линейные $F(t) = a_0+a_1t$
Квадратичные (полиномиальные порядка 2) $F(t) = a_0+a_1t+a_2t^2$
Кубические (полиномиальные порядка 3) $F(t) = a_0+a_1t+a_2t^2+a_3t^3$
Степенные $F(t) = a_0t^{a_1}$
Экспоненциальные $F(t) = a_0e^{a_1t}$
Логарифмические $F(t) = a_0 + a_1 \ln(t)$.

Качество модели оценивается коэффициентом достоверности (детерминации) R^2, который принимает значения от 1(идеальное качество) до 0 (никакого качества).

Пример 124. На основе данных по национальному доходу за 5 лет получить уравнение логарифмического тренда и найти прогнозное значение национального дохода в 2010-м и 2011-м годах.

Год	2004	2005	2006	2007	2008
Условный Год t	1	2	3	4	5
Нац. доход Y_t	100	120	130	135	137

Для удобства присвоим реальным годам порядковые номера, так называемые условные годы. Маркируем данные из двух нижних строк и строим ТОЧЕЧНУЮ диаграмму. Маркируем левой кнопкой полученную линию графика и вызываем правой контекстное меню. Команда ДОБАВИТЬ ЛИНИЮ ТРЕНДА. На вкладке ПАРАМЕТРЫ ТРЕНДА выбираем *Логарифмический* и активизируем опции *Показывать уравнение на диаграмме* и *Поместить на диаграмму коэффициент достоверности.*



Для получения прогноза на 2010 – й год вводим в любую свободную ячейку формулу

$$=23{,}56*ln(7)+101{,}8$$

(2010 – му году соответствует условный 7–й год)

Аналогично для 2011 – го года получаем

$$=23{,}56*ln(8)+101{,}8$$

Ответ: $Y_{2010}^{\text{прог}}$.= *147,6;* $Y_{2011}^{\text{прог}}$= *150,8.*

Коэффициент достоверности R^2 равен 0,978.

Для ускорения процесса ввода полученной формулы в свободную ячейку можно сделать так. Выделить формулу на диаграмме, скопировать ее в буфер (Вкладка ГЛАВНАЯ, группа БУФЕР ОБМЕНА, кнопка КОПИРОВАТЬ), а затем, активизировав строку формул, вставить из буфера нужный фрагмент и внести в этот фрагмент изменения (поставить знак умножения «*» после числа 23,56 и вместо символа *x* поставить 7).

§ 15. Задачи

15.1.Арифметические и логические выражения

Задача 1. Вычислить $\frac{5+\sqrt{3}}{1+\sqrt[3]{2}}$. *Ответ:* 2,979.

Задача 2. Вычислить $\frac{2^x \cdot x^{1,5}}{3e^{-x}}$ при x = ln3. *Ответ*: 2,466.

Задача 3. Вычислить f(1,2)+f(1,3), если $f(x) = \begin{cases} log_5 x, \ tgx > 3 \\ log_2 x, \ tgx \le 3 \end{cases}$.
Ответ: 0,426.

Задача 4. Вычислить $\frac{A_{20}^6 + A_{20}^5}{A_{20}^4}$. Ответ: 256

Задача 5. Вычислить $\frac{A_{10}^7}{6!(C_7^5 + C_7^4)}$. Ответ: 15.

Задача 6. Упростить $\overline{\overline{x} + \overline{y}} + (x \to y) \cdot x$. Ответ: $x + y$

Задача 7. Упростить $\left(\overline{\overline{x} + y} \to x + y\right) \cdot y$. Ответ: y.

Задача 8. Упростив, решить уравнение $\overline{(x \to y) \cdot (y \to x)}$ = ИСТИНА. *Ответ:* (x=1, y=0) и (x=0, y=1).

15.2. Последовательности данных и суммирование

Задача 9. Найти сумму 30 первых членов последовательности
$1, \quad -\frac{1}{3}, \quad \frac{1}{5}, \quad -\frac{1}{7}, \ \ldots$. *Ответ:* 0,78.

Задача 10. Найти сумму $\sum_{i=1}^{20} \frac{i}{i^2+10}$. *Ответ:* 1,87.

Задача 11. Найти сумму $\sum_{i=1}^{30} \frac{1}{\sqrt[i+1]{10+i}}$. *Ответ:* 23,01.

Задача 12. Найти сумму $\sum_{i=1}^{25} \frac{2 \cdot 8 \cdot 14 \cdot \ldots \cdot (6i-4)}{3 \cdot 10 \cdot 17 \cdot \ldots \cdot (7i-4)}$. *Ответ:* 3,95.

Задача 13. Найти сумму $\sum_{i=1}^{20} i^2 \cdot q^i$, для $q = 0{,}7$. *Ответ:* 43,05.

Задача 14. Найти сумму $\sum_{i=1}^{30} \frac{2^{i-1} \cdot x^{2i-1}}{(4i-3)^2}$, для $x = 0{,}9$. *Ответ:* 235,42.

Задача 15. Найти сумму $\sum_{i=1}^{30} x_i$ для рекуррентной последовательности $x_1 = 100$, $x_i = (x_{i-1} + i)/i$. *Ответ:* 203,67.

Задача 16. Найти $\sum_{i=1}^{40}\frac{(x_i + y_i + i)}{2\cdot i}$, для рекуррентных последовательностей

$x_1 = 1000,\quad x_i = \sqrt[i]{x_{i-1} + i};\quad y_1 = 500,\quad y_2 = 400,\quad y_i = (y_{i-1} + y_{i-2})/1{,}5.$

Ответ: 64156,87.

Задача 17. Построить рекуррентную последовательность $y_0 = A$,

$y_{n+1} = \frac{1}{3}\left(2y_n + \frac{B}{y_n^2}\right)$ при n=0, 1, 2, … . Найти y_{13} при A=300, B=27.

Ответ:. y_{13}=3,012. Убедиться, что независимо от A последовательность сходится к корню кубическому из B.

Задача 18. Найти сумму $\sum_{i=1}^{40}\frac{x^i}{i!}$ для $x = 1{,}57$. *Ответ:* 3,81.

Задача 19. Найти сумму $\sum_{n=0}^{10} C_{10}^n$. *Ответ:* 1024.

Задача 20. Найти сумму $\sum_{n=0}^{9} nC_9^n 0{,}25^n 0{,}75^{9-n}$. *Ответ:* 2,25.

Задача 21. Найти сумму $\sum_{n=0}^{5}\frac{A_5^n}{n!}$. *Ответ:* 32.

15.3. Операция усреднения

Задача 22. Найти среднее значение $\overline{X}$ для списка из 20 первых членов последовательности, заданной формулой общего члена:

$x_i = \sin(i) + \cos(i+1)$. *Ответ:* 0,02.

Задача 23. Найти среднее значение квадратов $\overline{X^2}$ для списка из 15 первых членов последовательности, заданной формулой общего члена: $x_i = 1 + \sqrt{2 + \sin(i+3)}$. *Ответ:* 5,55.

Задача 24. Даны два списка чисел

$x_1 = y_1 = 1,\ x_i = x_{i-1} + \frac{y_{i-1}}{i^2},\ y_i = y_{i-1} + \frac{x_{i-1}}{i},\ i = 2,3,\ldots,15.$

Найти $\overline{XY} - (\overline{X})(\overline{Y})$. *Ответ:* 0,29.

Задача 25. Даны два списка чисел

$x_i = \begin{cases} i, & \sin(i) \ge 0 \\ 2i, & \sin(i) < 0 \end{cases},\quad i = 1,2,\ldots,20,$

$y_1 = 1,\ y_2 = 3,\ y_i = \frac{y_{i-1} + y_{i-2} + i}{3},\quad i = 3,4,\ldots,20.$

Найти $\overline{X^2}$ и $\overline{Y^2}$. *Ответ:* 340,15; 94,02.

Задача 26. Даны два списка чисел

$x_1 = y_1 = 1,\ x_i = 0{,}95x_{i-1} + 0{,}3y_{i-1},\quad y_i = x_{i-1} + y_{i-1},\quad i = 2,3,\ldots,20.$

Найти $\overline{X}$, $\overline{X^2}$ и $\sqrt{\overline{X^2} - (\overline{X})^2}$. *Ответ:* 324,6; 437136; 576,00.

Задача 27. Даны два списка чисел

$x_i = \sin(i+1),\ i = 1,2,...,20$

$y_1 = 50,\ y_2 = 40,\ y_i = (i + y_{i-1} + 2\cdot y_{i-2})/3,\ i = 3,4,...,20$.

Найти $\overline{X^2Y^2}$ (с использованием и без использования функции СУММПРОИЗВ). *Ответ:* 1995,65.

15.4. Операция произведения

Задача 28. Найти произведение $\prod_{n=2}^{50}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$. *Ответ:* 0,51.

Задача 29. Найти произведение $\prod_{n=1}^{50}\frac{4n^2}{4n^2-1}$. *Ответ:* 1,56.

Задача 30. Используя функцию ПИ(), найти произведение $x\cdot\prod_{n=1}^{50}\left(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)$ для x =1; для x = 2 и для x = 3. О*твет:* 0,84; 0,92; 0,14.

15.5. Формирование матриц

Задача 31. Сформировать матрицу **A** размерности 10 х 10 по правилу: $a_{ij} = \frac{1+i}{2+i+j}$. Найти сумму элементов. *Ответ:* 50,00.

Задача 32. Сформировать матрицу **A** размерности 15×3 по правилу:
$$a_{ij} = \begin{cases}\frac{i+j}{10}, & \cos(i) \ge 0\\ \frac{i-j}{20}, & \cos(i) < 0\end{cases}$$
. Найти сумму элементов. *Ответ:* 31,05.

Задача 33. Сформировать матрицу **A** размерности 10×3 и матрицу **B** размерности 10×3 по правилу: $a_{ij} = \arccos(\cos(i)) - 2\arcsin(\sin(j))$, $b_{ij} = \begin{cases}a_{ij}, & a_{ij} > 0\\ 0, & a_{ij} \le 0\end{cases}$. Найти сумму элементов **A** и **B**. *Ответ:* 7,04; 18,74.

Задача 34. Сформировать матрицу **A** размерности 8×8 по правилу
$$a_{ij} = \begin{cases}2\sin(i+j), & i \le j\\ 1, & i > j\end{cases}$$
. Найти сумму элементов. *Ответ:* 29,51.

15.6. Операции над матрицами

Задача 35. Решить матричное уравнение $\begin{pmatrix}1 & 5 & 1\\ 0 & 3 & 7\\ 0 & 0 & 5\end{pmatrix}\cdot\mathbf{X} = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 2 & 2\\ 3 & 3 & 3\end{pmatrix}$.

Ответ: $x_{1i} = 4\frac{1}{15}$, $x_{2i} = -\frac{11}{15}$, $x_{3i} = \frac{3}{5}$.

Задача 36. Решить с проверкой систему уравнений $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 6 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 7 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 8 \end{cases}$.

Задача 37. Найти матрицу $\mathbf{C}^{-1}$ для матрицы **C** = **AB** при $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ -1 & 2 & -3 & 4 & -5 \end{pmatrix}$,

$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & 1 \\ 3 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$. *Ответ:* $\mathbf{C}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{9} \\ \frac{1}{28} & \frac{5}{28} \end{pmatrix}$.

Задача 38. Найти матрицу **D**, если **D** = **ABC**, если $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$. *Ответ:* $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 90 & 90 & 90 & 90 \\ 252 & 252 & 252 & 252 \end{pmatrix}$.

Задача 39. Для матрицы **A** размерности 8×8 с общим членом $a_{ij} = 10 \cdot \sin(i) \cdot \cos(2j)$ найти разность $\underset{i}{Min}\underset{j}{Max}\, a_{ij} - \underset{i}{Max}\underset{j}{Min}\, a_{ij}$.

Ответ: 2,71.

Задача 40. Для матрицы **A** размерности 7×7 с общим членом $a_{ij} = 10 \cdot \sin^2(10i) \cdot \cos(j+i)$ найти сумму элементов матрицы $(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A})^2$.

Ответ: 31066,30.

Найти сумму элементов матрицы $(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A})^2 - \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}$. *Ответ:* 31001,80.

Задача 41. Найти максимальный элемент матрицы **B** = $(\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1}$, где **E** – единичная матрица 7×7 (элементы главной диагонали равны единице, а остальные – равны нулю), а матрица **A** имеет размерность 7×7 и задается формулой $a_{ij} = 0{,}3 \cdot Sin^2(i) \cdot Cos^2(j)$. *Ответ:* МАКС(**B**)=1,11.

Задача 42. Решить матричное уравнение: **AX** = **B**, где матрица коэффициентов **A** имеет размерность 6×6 и задается по правилу: $a_{ij} = \begin{cases} 1, & i > j \\ 2\sin(i + \cos(j)), & i \le j \end{cases}$, а столбец свободных членов **B** имеет размерность 6×1 и определяется по правилу: $b_i = 6 \cdot \ln(1+i)$.

Ответ: $x_1 = 2{,}7,\ x_2 = -2{,}0,\ x_3 = 11{,}7,\ x_4 = -4{,}3,\ x_5 = -3{,}8,\ x_6 = 5{,}8$.

Найти наибольший элемент матрицы XX^T. *Ответ:* 136,21.

15.7. Построение графиков

Задача 43. Построить логистическую кривую, протабулировав на отрезке [0; 4] с шагом $\Delta x = 0{,}2$ функцию $f(x) = \dfrac{V}{1 + A \cdot e^{-Bx+C}}$. Значения параметров положить равными $A = 1$, $B = 2$, $C = 3$, $V = 4$ и расположить в ячейках D1, E1, F1, G1 соответственно.

Задача 44. Построить на отрезке [–3; 3] с шагом 0,05 графики функции плотности вероятностей нормального распределения $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$ для следующих трех пар значений параметров: $a = 0$, $\sigma = 1$; $a = 0$, $\sigma = 0{,}75$; $a = 0$, $\sigma = 0{,}5$. Графики расположить на одной диаграмме.

Задача 45. Построить на отрезке [0; 6] с шагом 0,1 графики функций Торнквиста для товаров первой необходимости, второй необходимости и предметов роскоши:

$$y = \frac{0{,}1 \cdot x}{x+1}, \quad y = \begin{cases} \dfrac{0{,}2 \cdot (x-1)}{x+0{,}1} & при \quad x \ge 1 \\ 0 & при \quad x < 1 \end{cases}, y = \begin{cases} \dfrac{0{,}08x \cdot (x-3)}{x+2} & при \quad x \ge 3 \\ 0 & при \quad x < 3 \end{cases}, \text{ где}$$

x–доход покупателя, *y=y(x)*–спрос на товар при доходе *x*. Графики расположить на одной диаграмме.

Задача 46. Построить на отрезке [0 ; 3] с шагом 0,1 график функции плотности вероятности Фишера со степенями свободы $k_1 = 5$, $k_2 = 9$

$$f(x) = 10{,}7 \cdot x^{\frac{k_1-2}{2}} \cdot \left(1 + \frac{k_1}{k_2} x\right)^{-7}.$$

Найти (оценить с помощью приближенного интегрирования) математическое ожидание и дисперсию. Найти точку максимума (моду) распределения.

Задача 47. Построить на отрезке [0 ; 6] с шагом 0,1 график функции плотности вероятности ХИ-квадрат с $k = 3$ степенями свободы

$f(x) = 0{,}4 \cdot x^{\frac{k-2}{2}} \cdot e^{-\frac{x}{2}}$.

Найти математическое ожидание, дисперсию и моду.

Задача 48. Построить на отрезке [–3 ; 3] с шагом 0,1 график функции плотности вероятности Стьюдента с $k = 10$ степенями свободы

$$f(x) = 0{,}39 \cdot (1 + 0{,}1x^2)^{-5{,}5}.$$

Найти математическое ожидание, дисперсию и моду.

Задача 49. Построить график функции $y = f(x)$, если $x = a\cos t$, $y = 0{,}3a\sin t$, $t \in$ [0; 6,4], $\Delta t = 0{,}2$. Коэффициент a расположить в ячейке F1 и положить равным 3. (Эллипс).

Задача 50. Построить график функции $y = f(x)$, если $x = \boldsymbol{a}cost(1 + cost)$, $y = \boldsymbol{a}sint(1 + cost)$, $t \in [-3{,}2; 3{,}2]$, $\Delta t = 0{,}2$. Коэффициент $\boldsymbol{a}$ расположить в ячейке G1 и положить равным 2.

Задача 51. Построить график функции $y = f(x)$, если $x(t) = \mathrm{a}\cos(t) - \cos(at)$, $y(t) = \mathrm{a}\sin(t) - \sin(at)$, $t \in [-2; 4{,}4]$, $\Delta t = 0{,}2$. Коэффициент расположить в ячейке H1 и положить равным 2.

Задача 52. Найти траекторию камня брошенного под углом $\alpha=\pi/6$ к горизонту с начальной скоростью $V_0=5$ (сопротивление воздуха не учитывается, ускорение свободного падения равно 10). Координаты траектории определяются по формулам $x=V_0 Cos(\alpha)t$, $y= V_0\, Sin(\alpha)t-5t^2$. Рекомендуется табулирование на отрезке [0; 1] с шагом $\Delta t = 0{,}05$.

15.8. Построение поверхностей

Задача 53. Протабулировать функцию $z = \sqrt{a - x^2 - by^2}$ на прямоугольнике $-2 \le x \le 2, -2 \le y \le 2$ с шагами $\Delta x = 0{,}25 \quad \Delta y = 0{,}25$. Построить график этой функции на указанном прямоугольнике. Параметр a расположить в ячейке A100 и положить равным 9. Параметр b поместить в ячейке B100 и положить равным 1.

Задача 54. Протабулировать функцию $z = 1 - \sin(ax)\sin(bx)$ на прямоугольнике $0 \le x \le 4$, $0 \le y \le 3$ с шагами $\Delta x = 0{,}4$, $\Delta y = 0{,}3$. Построить график этой функции на указанном прямоугольнике. Параметр a поместить в ячейке A20 и положить равным 3. Параметр b поместить в ячейке B20 и положить равным 2. Построить график линий постоянного значения с шагом 0,1.

Задача 55. Построить полусферу $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ на прямоугольнике $-1 \le x \le 1$, $-1 \le y \le 1$ с шагами $\Delta x = 0{,}1,\ \ \Delta y = 0{,}1$,. Для учета области определения использовать функцию ЕСЛИ().

Задача 56. Построить конус $z = \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2}$ на прямоугольнике $0 \le x \le 2$, $0 \le y \le 2$ с шагами. $\Delta x = 0{,}1,\ \ \Delta y = 0{,}1$. Построить график линий постоянного значения с шагом 0,1.

15.9. Приближенное нахождение производных и определенных интегралов

Задача 57. Протабулировать функцию $f(x) = \ln(x^2 - 2x + 2)$ на отрезке [–1; 4] с шагом $\Delta x = 0{,}25$ и построить на одной диаграмме ее график и графики ее первой и второй производной. Оценить визуально значения точек экстремума и перегиба.

Задача 58. Оценить “неберущийся” интеграл $\int_0^1 \sin(x^2)dx$, протабулировав подынтегральную функцию сначала с шагом 0,1, а затем с шагом 0,05. О*твет:* 0,35; 0,33.

Задача 59. Найти приближенные значения интеграла вероятностей $\int_{-a}^{a} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$ для следующих значений a : 1, 2, 3 . Оценить погрешность полученных значений с помощью изменения шага табулирования. Сравнить с табличными значениями функции Лапласа.

Задача 60. Оценить интеграл $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\sin x}{x} dx$, протабулировав подынтегральную функцию на отрезке $[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}]$ с шагом $\Delta x = \frac{\pi}{40}$. Воспользоваться функцией ПИ(). *Ответ:* 0,67.

Задача 61. Оценить интеграл $\int_0^2 \sqrt{3+x^3}dx$, протабулировав подынтегральную функцию с шагом $\Delta x = 0{,}1$ и с шагом $\Delta x = 0{,}05$. *Ответ:* 4,451; 4,41.

Задача 62. Протабулировать на отрезке [0 ; 10] с шагом 0,2 функцию плотности распределения вероятностей случайной величины ξ, распределенной по закону ХИ-квадрат с 4 степенями свободы $f(x)= 0{,}25 \cdot x \cdot e^{-\frac{x}{2}}$. Оценить вероятность попадания ξ в промежуток [0 ; 4] по формуле $P\,(0 \le \xi \le 4) = \int_0^4 f(x)dx$ ($P \approx$ 0,6066). Оценить математическое ожидание ξ по формуле: $M\xi \approx \int_0^{10} x \cdot f(x)dx$ ($M\xi \approx$ 3,52). Оценить медиану ξ ($med\ \xi$), исходя из условия: $\int_0^{med} f(x)dx = \frac{1}{2}$ ($med \approx$ 0,33).

Задача 63. Оценить методом Монте-Карло интеграл $\int_0^2 (x+1)^x\,dx$. Число опытов N=50. Квазислучайные последовательности для x: S_n=ABS(SIN(n^2)), для y: S_n=ABS(COS(n^3)). *Указание:* наибольшее значение подынтегральной функции на отрезке интегрирования равно 9, поэтому множество всех возможных исходов (x,y) представляет cj,jq прямоугольник 2x9. *Ответ:* 11,520

15.10. Дифференциальные уравнения

Задача 64. Оценить y(3), где y(x) – решение уравнения $y' = \frac{x+1}{2y}$ с начальным условием y(2)=3. Применить метод Эйлера с шагом $\Delta x = 0{,}1$.
Ответ: $y^*(3) = 3{,}532$.

Задача 65. Оценить y(6), где y(x) – решение уравнения $y' = \frac{y^2+x^3}{xy}$ с начальным условием y(1)=2. Применить метод Эйлера с шагом $\Delta x = 0{,}25$. Найти относительную погрешность оценки (в процентах), если точное решение имеет вид $y = x\sqrt{2x+2}$.
Ответ: $y^*(6) = 21{,}626$. Относительная погрешность равна 3,670%.

Задача 66. Оценить y(10), где y(x) – решение уравнения $y' = \sqrt{x+y}$ с начальным условием y(5)=4. Применить метод Рунге-Кутта с шагом $\Delta x = 0{,}25$. *Ответ:* $y^*(10) =$ 75,432.

Задача 67. Найти чувствительность приближенного решения $y^*(5)$ уравнения $y' = \frac{x+1}{2y}$ с начальным условием y(1) = 4 методом Эйлера ($\Delta x = 0{,}2$) к 5% уменьшению начального значения
Ответ: $y^*(5) = 5{,}340$ (для y(1)=4),. $y^*(5) = 5{,}193$ (для y(1)=3,8), чувствительность равна – 2,76%

15.11. Алгебраические уравнения и неравенства

Задача 68. Найти наибольший корень уравнения $x^3 + x = 1000$. *Ответ:* 9,97.
Задача 69. Найти все корни уравнения $4x - 5lnx = 5$. *Ответ:* 0,59; 2,28.
Задача 70. Найти корень уравнения $x - 0{,}25 = sinx$. *Ответ:* 1,17.
Задача 71. Найти корень уравнения $e^x - 2(1-x)^2 = 0$. *Ответ:* 0,21.

Задача 72. Найти все корни уравнения $(x-1)^2 - 2sinx = 0$. *Ответ:* 0,27;

Задача 73. Найти длину (сумму длин) интервалов решения неравенства

$$x^2 - |5x-9| \geq 5x$$

на отрезке [–4; 11]. *Ответ:* 3.

15.12. Системы уравнений

Задача 74. Решить систему $\begin{cases} x^2+4y^2=5xy \\ 2x^2-y^2=31 \\ x+y^3=5 \end{cases}$. *Ответ:* (4; 1).

Задача 75. Решить $\begin{cases} x-2y+3z=9 \\ x^2+4y^2+9z^2=189 \\ 3xz=4y^2 \\ x \geq 7 \end{cases}$. *Ответ:* (12; 3; 1).

Задача 76. Система $\begin{cases} x^2+y^2-x-y=102 \\ xy+x+y=69 \end{cases}$ имеет ровно два решения. Найти эти решения.

Задача 77. Три сестры пришли на рынок и торговали поштучно цыплятами. Первая принесла 16 цыплят, вторая – 25, третья – 30 цыплят. Каждая из них часть товара продала утром, а часть – вечером. Утренняя цена была у всех сестер одинаковая, и вечерняя цена тоже одинаковая, но более низкая. К вечеру весь товар был распродан, и дневная выручка у всех сестер оказалась одинаковой: *7 руб. 75 коп*. Найти общую утреннюю выручку. *Указание.* В установках параметров ПОИСКа РЕШЕНИЯ использовать в качестве ограничений *целочисленность* переменных. *Ответ:* 11 руб.

15.13. Оптимальные значения

Задача 78. Найти наименьшее значение функции $y = |x-1| + |x-2| + |x-3|$. *Ответ:* 2.

Задача 79. Найти моду случайной величины ξ с плотностью вероятности ХИ-квадрат с $k=3$ степенями свободы $f(x)=0{,}4\cdot x^{0,5}\cdot e^{-0,5x}$ (модой называется точка максимума функции плотности распределения вероятностей). *Ответ:* $X_{макс}$=1, $f_{макс}$=0,607.

Задача 80. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $f(x)=x^2-3x+2\sin(x)$ на отрезке [–2; 4]. *Ответ:* $f_{наиб.}$=2,49, $f_{наим.}$=–0,32.

Задача 81. Минимизировать линейную функцию $L=12x_1+4x_2$ при ограничениях: $x_1+x_2 \geq 2$, $x_1 \geq 0{,}5$, $x_2 \leq 4$, $x_1-x_2 \geq 0$.

Ответ: $L_{мин}$= 16 при x_1 = 1, x_2 = 1.

Задача 82. Найти наибольшее значение функции $L=x_1+3x_2+3x_3$ при ограничениях: $x_2+4x_3 \leq 3$, $x_1-x_2 \geq 1$, $x_1 \leq 2$, $3x_1+x_2 \leq 15$.

Ответ: $L_{макс}$=6,5 при x_1 = 2, x_2 = 1, x_3 = 0,5.

Задача 83. Найти наименьшее значение функции $L = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ при ограничениях: $x_1 - 2x_2 + x_3 = 1$, $x_1 + 3x_2 + x_3 = 3$.
Ответ: $L_{наим.}$= 1,78 при x_1 = 0,9, x_2 = 0,4, x_3 = 0,9.

Задача 84. Найти минимум функции $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - xy + x - 2z$. *Ответ:* $f_{мин} = -1{,}33$.

Задача 85. Найти минимум функции $z = x^2 + y^2$ при условии $3x + 2y = 6$. *Ответ:* $z_{мин} = 36/13$.

Задача 86. Найти максимум и минимум функции $z = x + 2y$ при условии $x^2 + y^2 = 5$. *Ответ:* $z_{мин} = -5$, $z_{макс} = 5$.

Задача 87. Найти максимум функции $f(x,y,z) = xy^2z^3$ при условии $x + y + z = 12$, $x, y, z \geq 0$. *Ответ:* $f_{макс} = 6912$.

Задача 88. Определить наибольшее значение функции $f(x,y) = x^2y$ в области $x^2 + 3y^2 \leq 2$, $x, y \geq 0$. *Ответ:* $f_{макс} = 0{,}63$ при x =1,15, y =0,47.

Задача 89. Активы фирм A, B и C складываются из акционерного и заемного капитала. При слиянии фирм объединяются их активы. Если сливаются фирмы A и B, то доля заемного капитала в их общем активе становится равной 2/5. Если сливаются фирмы B и C , то доля заемного капитала в их общем активе становится равной 3/7. Сливаются все три фирмы. Чему равна минимально возможная доля заемного капитала в активе объединения? *Ответ:* 6/23.

15.14. Генерирование случайных чисел

Задача 90. Сгенерировать три ряда по 20 случайных чисел, равномерно распределенных на трех разных отрезках [a;b]: [0 ; 100]; [–10 ; –5]; [–5 ; 5].
Найти средние значения и исправленные выборочные дисперсии. Сравнить с теоретическими значениями $M\xi = \frac{a+b}{2}$ $D\xi = \frac{(b-a)^2}{12}$

Задача 91. Сгенерировать 40 случайных чисел, распределенных по логнормальному закону с параметрами a=0,1, σ=0,1. Квазислучайная последовательность: S_n= 0,5(1+SIN(n)). Найти выборочное среднее значение и исправленную выборочную дисперсию. *Ответ*: 1,112; 0,026. Найти теоретические среднее значение и дисперсию. *Ответ*: 1,111; 0,012.

Задача 92. Построить последовательность из 20 троек (x_n, y_n, z_n) квазислучайных чисел по правилу: $z_n = \sin^2(n^2)$, $x_n = 1{,}09^n \cdot (1 + \sin(z_n))$,
$y_n = 1{,}12^2 \cdot (1 + \sin(3 + z_n))$
Найти выборочные коэффициенты корреляции $\rho_{xy}, \rho_{xz}, \rho_{yz}$. *Ответ*: 0,38; 0,37; –0,60.

Задача 93. Найти критическую точку порядка 0,022 для распределения ХИ-квадрат с 15–ю степенями свободы. *Ответ*: 27,93

Задача 94. Найти критическую точку порядка 0,15 для распределения Фишера с (20; 25) степенями свободы. *Ответ*: 1,55

Задача 95. Найти критическую точку порядка 0,06 для распределения Стьюдента с 35–ю степенями свободы для двухсторонней критической области. *Ответ*: 1,94

Задача 96. Найти критическую точку порядка 0,06 для распределения Стьюдента с 35–ю степенями свободы (критическая область односторонняя). *Ответ*: 1,59

Задача 97. Решить уравнение $P(\chi^2(8) > x) = 0{,}2$.

Задача 98. Решить уравнение $P(F(14;18) > x) = 0{,}3$.

Задача 99. Оценить методом Монте-Карло интеграл $\int_0^1 e^{-x}dx$. Количество точек N=100, $x_n = 0{,}31\arccos\left(\cos(100n)\right),\ y_n = 0{,}31\arccos\left(\cos(50n)\right)$

Задача 100. Дискретная случайная величина ξ принимает целые значения от 1 до 25 с вероятностями $P(\xi = k) = \frac{c}{\sqrt{k}}$, где c – нормировочная константа. Найти c, $M(\xi), D(\xi), P(\xi > 15)$

Задача 101. Задана плотность непрерывной случайной величины η:

$$f_\eta(x) = \begin{cases} 0\ , & x < 1 \\ \dfrac{c}{x^2 + x}\ , & 1 \le x \le 3 \\ 0\ , & x > 3 \end{cases}$$

Найти c, $M(\eta), D(\eta), P(\eta > 2)$. Применить приближенное интегрирование по формуле трапеций с шагом $\Delta x = 0{,}1$.

Задача 102. Найти выборочный коэффициент корреляции для компонент двумерной выборки (X_n, Y_n), если $X_n = \cos(n)\ ,\ Y_n = \sin(n+2)\ ,\ n = 1,2,\dots,20$.

Задача 103. Найти выборочный коэффициент автокорреляции для процесса $X_n = \arcsin(\sin(n))\ , n = 1,2,\dots,12$.

Задача 104. Совместная вероятность для двумерной системы случайных величин задается соотношением: $p_{ij} = P(\xi = i, \eta = j) = c\,\frac{1+i}{2+j}\ ,\ i = 1, 2, \dots, 5,\ j = 1, 2, \dots, 4$. Найти c, $M(\xi\eta)$.

Задача 105. Совместная вероятность для двумерной системы случайных величин задается соотношением: $p_{ij} = P(\xi = \sqrt{i}, \eta = \sqrt[3]{j}) = c\,\frac{1+i}{2+j}\ ,\ i = 1, 2, \dots, 5,\ j = 1, 2, \dots, 4$. Найти c, $M(\xi\eta)$.

Задача 106. Получить 20 квазислучайных чисел, распределенных по закону ХИ-квадрат с 8–ю степенями свободы. В качестве замены СЛЧИС() использовать последовательность $S_n = 0{,}31\mathit{arccos}(\cos(10n))$, n=1, 2, …20. Найти исправленную выборочную дисперсию.

Задача 107. Получить 30 квазислучайных чисел, распределенных по логнормальному закону с параметрами a =0,01, σ=0,2. В качестве замены СЛЧИС() использовать последовательность $S_n = 0{,}31\mathit{arccos}(\cos(n))$, n=1, 2, …30. Найти исправленную выборочную дисперсию.

Задача 108. Сгенерировать ряд из 30 случайных чисел, распределенных по нормальному закону с параметрами $m = 3$ и $\sigma = 2$. В качестве замены СЛЧИС() использовать S_n=ABS(COS(n)). Найти выборочное среднее значение и исправленную выборочную дисперсию. *Ответ*: 4,085; 7,041.

15.15. Разные задачи

Задача 109. Дана последовательность $a_i = \dfrac{\sin i}{i}, i = 1, 2, \cdots, 100$.

Реализовать автоматический поиск среди всех положительных членов этой последовательности наименьшего значения. Решить задачу, не опускаясь курсором ниже 2-ой строки листа. *Ответ:* 0,000402.

Задача 110.Дана последовательность $a_i = \arcsin(\sin(i))$, $i = 1, 2, \ldots, 200$.
Реализовать автоматическое нахождение суммы квадратов тех членов последовательности, которые больше 0,25. Решить задачу, не опускаясь курсором ниже 2-ой строки листа. *Ответ:* сумма равна 82,1996.

Задача 111.Дана последовательность $a_i = e^{\cos(i^2)}$, $i =1, 2, \ldots, 500$.

Реализовать автоматический подсчет числа случаев, когда последующий член a_{i+1} больше предыдущего a_i более, чем на 10%. Решить задачу, не опускаясь курсором ниже 2-ой строки листа. *Ответ:* 40.

Задача 112.Создать таблицу по образцу, сохраняя все элементы формата:

	A	B	C	D	E
1					
2		**Время t**	**Уровень цен X_t**	**Номинальная зарплата Y_t**	**Реальная зарплата Z_t**
3		0	100,0	200,0	2,00
4		1	105,0	229,7	2,19
5		2	110,5	249,1	2,26

Уровень цен определяется рекуррентно

$$X_t = 1{,}05 \cdot X_{t-1} + 0{,}04 \cdot t^2,\ X_0 = 100.$$

Номинальная зарплата определяется как функция времени

$$Y_t = 200 \cdot \sqrt[5]{1+t}.$$

Реальная зарплата определяется отношением номинальной зарплаты к уровню цен.

Задание 1. Заполнить таблицу для t от 0 до 20 и построить на одной диаграмме точечные графики X_t и Y_t.

Задание 2. Построить график Z_t с линейным трендом. Вывести уравнение тренда и коэффициент достоверности на диаграмму. Найти прогнозное значение Z_{25}.
Ответ: Z_{25}.= 0,61, уравнение тренда: y=–0,0729t+2,4319.

Задача 113.Создать таблицу по образцу, сохраняя все элементы формата:

	A	B	C	D	E
1					
2		**Период t**	**Стоимость корзины в США в долларах X_t**	**Стоимость корзины в РФ в рублях Y_t**	**Паритетный курс доллара Z_t**
3		0	100,0	2000,0	20,0
4		1	102,0	2188,6	21,5

Стоимость потребительской корзины товаров и услуг в США (в долл.) определяется рекуррентно $X_0 = 100$, $X_t = 1{,}02 \cdot X_{t-1} + 0{,}01 \cdot t^2$.

Стоимость той же по составу и количеству корзины в РФ (в руб.) определяется как функция времени $Y_t = 2000 \cdot (1 + t)^{0,13}$.

Паритетный курс доллара определяется отношением стоимости корзины в рублях к стоимости корзины в долларах.

Задание 1. Заполнить таблицу для t от 0 до 20 и построить на одной диаграмме точечные графики X_t и Y_t.

Задание 2. Построить график Z_t с линейным трендом. Вывести уравнение тренда на диаграмму. Найти Z_{20}.

Ответ: паритетный курс Z_{20} = 16,5 (рубля за доллар), уравнение тренда:
$Y = -0{,}2609t + 23{,}498$.

Задача 114. Заполнить таблицу по образцу

	A	B	C	D	E
1					
2		**Время t**	**Масса денег M_t**	**Национальный продукт (доход) Y_t**	**Уровень цен P_t**
3		0	10,0	20,0	1,000
4		1	10,5	25,6	0,820

Масса денег в t-й момент определяется рекуррентно

$$M_0 = 10, \quad M_{t+1} = M_t(1 + 0{,}05\sqrt{t}).$$

Национальный доход определяется также рекуррентно

$$Y_0 = 20, \qquad Y_{t+1} = 1{,}03Y_t + 5.$$

Уровень цен определяется уравнением обмена Фишера

$$P_t = \frac{M_t V}{Y_t},$$

где скорость обращения денег $V = 2$.

Задание 1. Заполнить таблицу для t от 0 до 20 и построить на одной диаграмме точечные графики M_t и Y_t.

Задание 2. Построить график P_t с линейным трендом. Вывести уравнение тренда на диаграмму. Найти P_{20}.

Задание 3. Выяснить, начиная с какого момента времени инфляция будет превышать 10% за период (инфляция за период t определяется по формуле $\frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}} \cdot 100\%$). *Ответ:* P_{20} = 2,025; 10% – й порог инфляции будет превышен в 14-м периоде.

Задача 115. Создать таблицу по образцу, сохраняя все элементы формата:

	A	B	C	D	E
1					
2		**Время t**	**Население X_t**	**Производство Y_t**	**Пр-во на душу населения**
3		0	10,00	20,0	2,00
4		1			

Численность населения X_t и объем производства Y_t определяются как функции времени по формулам:

$$X_t = 10 \cdot \sqrt{1+t}, \qquad Y_t = 20 \cdot 1{,}1^t.$$

Производство на душу населения Z_t определяется как частное от деления Y_t на X_t.

Задание 1. Заполнить таблицу для t от 0 до 15 и построить на одной диаграмме точечные графики X_t и Y_t.

Задание 2. Построить график Z_t с линейным трендом. Вывести уравнение тренда на диаграмму.

Задание 3. Построить гистограмму цепных темпов прироста производства на душу населения (цепной темп прироста за период t определяется по формуле $\frac{Z_t - Z_{t-1}}{Z_{t-1}} \cdot 100\%$).

Задача 116. Создать таблицу по образцу, сохраняя все элементы формата:

	A	B	C	D	E
1					
2		**Время t**	**Валовой сбор зерна (ц) X_t**	**Посевная площадь (га) Y_t**	**Урожайность (ц/га)**
3		0	10,0	0,25	40,00
4		1			

Валовой сбор зерна X_t и посевная площадь Y_t определяются как функции времени по формулам: $X_t = 0{,}1 \cdot t^2 + 10$, $Y_t = 0{,}25 + 0{,}02 \cdot t$.

Урожайность Z_t определяется как частное от деления X_t на Y_t.

Задание 1. Заполнить таблицу для t от 0 до 20 и построить на одной диаграмме графики X_t и Y_t (тип НЕСТАНДАРТНЫЕ, ГРАФИКИ (2 оси)).

Задание 2. Построить график Z_t с экспоненциальным трендом. Вывести уравнение тренда на диаграмму. Найти Z_{20}.

Задание 3. Найти среднее геометрическое цепных коэффициентов роста урожайности с 1-го по 20-й периоды (коэффициент роста за период t определяется по формуле $\frac{Z_t}{Z_{t-1}}$).

Ответ: уравнение экспоненциального тренда $Y = 31{,}6e^{0{,}0408t}$, среднее геометрическое равно 1,03.

Задача 117. Создать таблицу по образцу, сохраняя все элементы формата:

	A	B	C	D	E
1					
2		**Время t**	**Население X_t**	**Жилой фонд Y_t**	**Жил. площадь на душу населения**
3		*0*	*10*	*100*	*10*
4		*1*			

Численность населения X_t и жилой фонд Y_t определяются как функции времени по формулам:

$$X_t = 10 \cdot (1+t)^{0,6} \text{ млн. чел.}, \qquad Y_t = 100 \cdot 1{,}1^t \text{ млн. кв. м.}$$

Жилплощадь на душу населения Z_t определяется как частное от деления Y_t на X_t.

Задание 1. Заполнить таблицу для t от 0 до 25 и построить на одной диаграмме точечные графики X_t и Y_t.

Задание 2. Построить график Z_t с линейным трендом. Вывести уравнение тренда на диаграмму. Найти Z_{25}.

Ответ: Z_{25}=15,34, уравнение линейного тренда Y=0,312t+4,238.

Задание 3. В каком периоде обеспеченность жильем была наименьшей?

Ответ: в пятом, Z_5=5,5.

Задача 118. Создать таблицу по образцу.

	A	B	C
1			
2	**Время t**	*0*	*1*
3	**Экспорт (млрд. долл.) X_t**	*70*	
4	**Импорт (млрд. долл.) Y_t**	*80*	
5	**Сальдо**	*-10*	

Экспорт X_t определяется как функция времени по формуле

$$X_t = 70 - 10 \cdot t + 1{,}1 \cdot t^2.$$

Импорт Y_t определяется по формуле

$$Y_t = 80 - 9 \cdot t + 0{,}9 \cdot t^2.$$

Сальдо внешнеторгового баланса Z_t определяется как разность между экспортом и импортом.

Задание 1. Заполнить таблицу для t от 0 до 20 и построить на одной диаграмме точечные графики X_t и Y_t.

Задание 2. Построить график Z_t с полиномиальным 2-ой степени (квадратичным) трендом. Найти Z_{20}. Вывести уравнение тренда на диаграмму.

Ответ: Z_{20}=50, уравнение тренда Y=0,2t^2–1,4t–8,8.

Задание 3. С какого периода сальдо внешнеторгового баланса станет неотрицательным?
Ответ: сальдо неотрицательно с 10-го периода.
Задача 119.Создать таблицу по образцу:

	A	B	C	D	E
1					
2		Время t	Добыча нефти X_t	Внутреннее потребление Y_t	Экспорт Z_t
3		0	400,0	200,0	200,0
4		1			

Добыча нефти X_t определяется рекуррентно:

$$X_0 = 400 \text{ (млн. т.)}, \qquad X_t = 0{,}9 \cdot X_{t-1} + 30 \text{ (млн. т.)}.$$

Внутреннее потребление Y_t определяется как функция времени по формуле

$$Y_t = 200 \cdot (1+t)^{0,1} \text{(млн. т.)}.$$

Экспорт Z_t определяется разностью между X_t и Y_t.

Задание 1. Заполнить таблицу для t от 0 до 20 и построить на одной диаграмме точечные графики X_t и Y_t.

Задание 2. Построить график Z_t с логарифмическим трендом. Найти Z_{20}. Вывести уравнение тренда на диаграмму. *Ответ:* Z_{20}=40,98, уравнение логарифмического тренда, $Y = -56{,}1 LnT + 214{,}5$.

Задание 3. Найти средние значения цепных темпов прироста за 20 периодов для процессов X_t, Y_t, Z_t (Цепной темп прироста за период t вычисляется по формуле $\frac{X_t - X_{t-1}}{X_{t-1}} \cdot 100\%$). *Ответ:* средние значения цепных темпов прироста равны: для добычи нефти (–1,23%), для внутреннего потребления 1,55%, для экспорта (–7,6%).
Задача 120.Создать таблицу по образцу:

	A	B	C	D	E
1					
2		Время t	Объем продаж X_t	Затраты Y_t	Прибыль Z_t
3		0	10,0	8,0	2,0
4		1	11,5	8,4	3,1

Объем продаж X_t определяется рекуррентно:

$$X_0 = 10 \text{(млн. руб.)}, \qquad X_t = 1{,}05 \cdot X_{t-1} + 1 \text{(млн. руб.)}.$$

Объем затрат Y_t определяется как функция времени по формуле

$$Y_t = 8 \cdot 1{,}05^t \text{(млн. руб.)}.$$

Прибыль Z_t определяется разностью между X_t и Y_t.

Задание 1. Заполнить таблицу для t от 0 до 15 и построить на одной диаграмме точечные графики X_t и Y_t.

Задание 2. Построить график Z_t со степенным трендом. Найти Z_{15}. Вывести уравнение тренда на диаграмму. *Ответ:* Z_{15}=25,74; уравнение степенного тренда Y=1,6$T^{0,9538}$.

Задание 3. Найти средние значения объемов продаж, затрат и прибыли с 0-го по 15-й периоды. *Ответ:* $\overline{X}$ =24,36; $\overline{Y}$ =11,83; $\overline{Z}$ =1