ГЛАВА 3 . ПРИМЕНЕНИЕ В ИССЛЕДОВАНИИ ДИНАМИКИ СОЦИАЛЬНО-ЭКОНОМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ... 2

§ 1. Модель Мальтуса 2

§ 2. Демографическая модель 3

§ 3. Модель распространения инноваций (нововведений) 6

§ 4. Модели “хищник-жертва” 8

4.1. Модель M1. Отсутствие взаимодействия....................................... 8
4.2. Модель M2. Взаимодействие популяций 9
4.3. Модель M3. Учет эффекта перенаселенности 11
4.4. Краткая постановка задачи 13

§ 5. Модель Ричардсона гонки вооружений 13

5.1. Краткая постановка задачи 16

§ 6. Модель Ланчестера боевых действий 17

6.1. Краткая постановка задачи. 20

§ 7. Влияние инвестиционной политики на экономический рост 21

7.1. Модель 1. Управление инвестициями 21
7.2. Модель 2. Постоянный темп роста непроизводственного потребления 25

§ 8. Модель Солоу экономического роста 28

8.1. Изучение процесса установления стационарного режима 28
8.2. Выявление оптимальной нормы накопления 30

§ 9. Модель Эванса установления равновесной цены 30

9.1. Степенные функции спроса и предложения 31
9.2. Обобщенное уравнение динамики 32

§ 10. Паутинообразная динамическая модель установления равновесной цены... 33

10.1. Модель с линейными функциями 33
10.2. Модель со степенными функциями 35

Приложение 1. Справка по EXCEL 39

Глава 3 . Применение в исследовании динамики социально-экономических процессов

§ 1. Модель Мальтуса[1]

Введем обозначения: t – номер периода; a_t – объем производства продуктов питания (средств существования); p_t – численность населения.

Объем производства продуктов питания увеличивается по закону арифметической прогрессии: $a_{t+1} = a_t + d$, где d – положительная константа. Численность населения увеличивается по закону геометрической прогрессии: $p_{t+1} = q \cdot p_t$, где q – положительный коэффициент роста ($q > 1$). Стартовые (начальные) значения a_0 и p_0 задаются непосредственно.

Задача 1. Для модели Мальтуса с параметрами

$$a_0 = 100\ ,\ p_0 = 10,\ d = 10,\ q = 1{,}06$$

установить, в каком временном интервале производство продуктов питания на единицу населения (удельное производство): а) увеличивается; б) достигает максимального значения; в) опускается ниже стартового уровня; г) достигает половины стартового уровня.

Построить график удельного производства для $t = 1, 2, \ldots, 40$.

Решение.

1. Введем данные, как показано на рис. 1.1.

	A	B	C	D	E	F	G
1	Номер периода	Продукты	Население	Продукты на единицу населения			
2	1	100	10	=B2/C2		d	10
3	2	=B2+$G$2	=C2*$G$3	=B3/C3		q	1,06
4							

Рис. 1.1

2. В ячейку G2 помещаем величину прироста производства продуктов (10 единиц за период), в ячейку G3 – коэффициент увеличения населения (6% за период = 1,06).
3. Вводим в колонку A номера периодов с 0-го по 40-й.
4. Копируем формулы из трех ячеек B3:D3 вниз до 40-го периода.
5. Маркируем числовые данные из колонки A и колонки D и строим точечную диаграмму (рис. 1.2).

[1] Мальтус Томас Роберт, английский экономист.

Ответ: увеличение удельного производства происходит с 1-го по 8-й периоды; максимум достигается при $t = 8$ и равен 11,31; уровень удельного производства ниже стартового при $t \geq 19$; половина начального уровня достигается при $t = 40$ и дальше стремительно уменьшается до нуля (рис. 1.2).

Задача 2. Для модели Мальтуса с параметрами $a_0 = 100$, $p_0 = 10$, $q = 1{,}06$ найти наименьшее целое значение прироста d, при котором на всем временном интервале от $t = 1$ до $t = 40$ удельное производство не опускается ниже стартового уровня. Построить график.

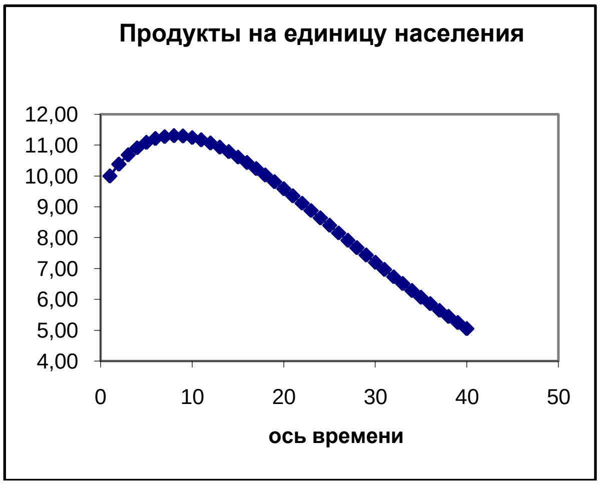


Рис. 1.2.

Задача 3. Для модели Мальтуса с параметрами $a_0 = 100$, $p_0 = 10$, $d = 10$ найти наибольший целый процент увеличения населения, при котором на всем временном интервале от $t = 1$ до $t = 40$ удельное производство растет. Построить график.

Замечание. Одному проценту соответствует $q = 1{,}01$, двум процентам соответствует $q = 1{,}02$ и т.д.

§ 2. Демографическая модель

Пусть X_t – численность женского населения в первой возрастной группе (до 20 лет);

Y_t – численность женского населения во второй возрастной группе (от 20 до 40 лет);

Z_t – численность женского населения в возрасте после 40 лет;

N_t – полная численность населения (женское плюс мужское);

a – поправка на бездетность (доля женщин способных к рождению); b – среднее число рождений, приходящихся на одну женщину; c – доля девочек среди родившихся; d – коэффициент выживаемости в первой возрастной группе.

Один временной шаг полагаем равным 20 годам (смена одного поколения). Динамика процессов определяется следующими соотношениями:

в группу женского населения до 20 лет попадают все девочки, рожденные второй возрастной группой за 20 лет (с учетом вероятности рождения девочки и поправки на бездетность), а именно:

$$X_t = c \cdot b \cdot a \cdot Y_{t-1},$$

где $a \cdot Y_{t-1}$ – количество способных к рождению женщин второй возрастной группы; $b \cdot a \cdot Y_{t-1}$ – количество рождений; $c \cdot b \cdot a \cdot Y_{t-1}$ – количество девочек среди новорожденных;

2) во вторую возрастную группу перейдет все женское население из первой возрастной группы с учетом выживаемости:

$$Y_t = d \cdot X_{t-1};$$

3) численность третьей возрастной группы (после 40 лет) составляет 0,65 от суммарной численности первых двух возрастных групп:

$$Z_t = (X_t + Y_t) \cdot 0{,}65;$$

4) суммарная численность всего населения (мужское плюс женское) равно полному женскому населению с коэффициентом 1,9 (мужское население составляет 90% от женского)

$$N_t = (X_t + Y_t + Z_t) \cdot 1{,}9.$$

Задача 1. Промоделировать динамику численности населения на временном интервале в 30 поколений для следующих значений параметров: a = 0,98 (поправка на бездетность; из 100 женщин второй возрастной группы 2 бездетны); b = 2,0 (среднее число детей, приходящихся на одну женщину в полной или неполной семье); c = 0,49 (вероятность рождения девочки); d =0,975 (коэффициент выживаемости в первой возрастной группе);

X_0=20, Y_0=25 (стартовые значения численностей первой и второй возрастных групп).

	A	B	C	D	E
1		Параметры модели			
2		поправка бездет.	детей в семье	доля девочек	коэфф. выживаем.
3		xa	xb	xc	xd
4		0,98	2	0,49	0,975
5					
6	t	Xt	Yt	Zt	Nt
7	0	20	25	=(B7+C7)*0,65	=(B7+C7+D7)*1,9
8	1	=C7*xa*xb*xc	=B7*xd		

Рис. 2.1

Решение.

1. Присвоим ячейкам B4,C4,D4 и E4 имена соответственно xa, xb, xc и xd и введем данные, как показано на рис. 2.1.
2. Скопируем формулы из B8, C8, D7 и E7 на нужное количество ячеек вниз. Маркируем данные из столбцов A и E (номера поколений и полная численность населения) и строим диаграмму типа ТОЧЕЧНАЯ (рис. 2.2).

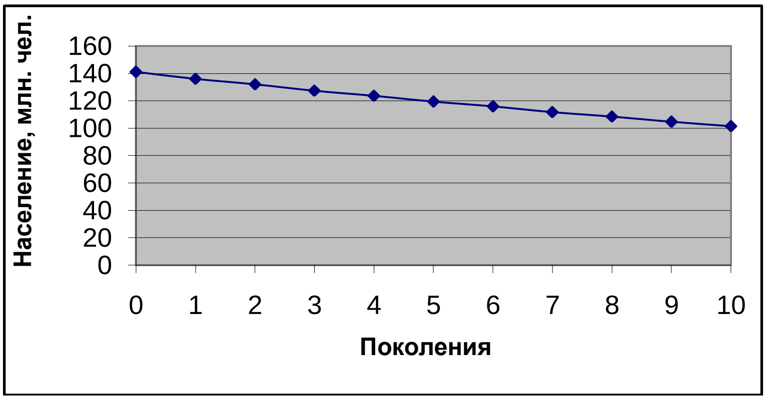


Рис. 2.2

Задача 2. Для данных из задачи 1 найти наименьшее значение параметра b (среднее число детей в семье), при котором будет обеспечено простое воспроизводство, т.е. население не будет уменьшаться. Ответ дать с двумя десятичными знаками после запятой.

Задача 3. Для данных из задачи 1 найти значение параметра *d* (среднее число детей в семье), при котором полная численность населения удвоится за 5 поколений. Построить график.

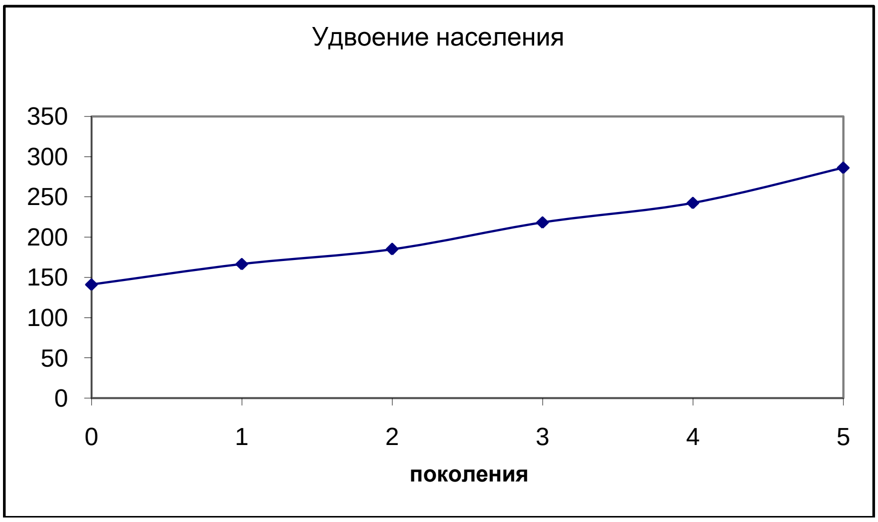


Рис. 2.3

§ 3. Модель распространения инноваций (нововведений)

Эта модель описывает следующие процессы: распространение политических и научных идей, технологий, новых товаров, вовлечение людей в общественные движения, получение знаний в новой области и т. д.

Пусть M – емкость рынка (максимально возможное число лиц, способных принять нововведение); X_0– первоначальное число, принявших нововведение; X_t– число охваченных нововведением в t - й момент.

Формула для прироста числа сторонников нововведения имеет вид:

$$X_t - X_{t-1} = a \cdot X_{t-1} \cdot (M - X_{t-1}).$$

Комментарий. Распространение нововведения осуществляется за счет контактов X_t лиц охваченных и $M - X_t$ лиц неохваченных нововведением. Число контактов пропорционально произведению этих величин. Эффективность контактов (скорость вовлечения новичков, “сила”, привлекательность идеи) задается положительным коэффициентом a.

Рекуррентное соотношение для нахождения процесса X_t имеет вид

$$X_t = a \cdot X_{t-1} \cdot (M - X_{t-1}) + X_{t-1}.$$

Стартовое значение задается непосредственно $X_0 = X0$.

Задача 1. Построить график процесса X_t для t=1, 2, …, 20 при следующих значениях параметров модели: M =40 , a =0,01.

Построить графики первой и второй производной процесса.

Решение.

	A	B	C	D	E	F
1	t	Xt	Скорость	Ускорение		
2	0	1			a	0,01
3	1	=$F$2*B2*($F$3-B2)+B2	=B3-B2		M	40
4	2			=C4-C3		
5	3					

Рис. 3.1

1. Заполним ячейки, как показано на рис. 3.1.
2. Копируем формулы из B3, C3 и D4 на нужное количество ячеек вниз.
3. По данным из колонок A и B строим диаграмму типа ТОЧЕЧНАЯ (рис. 3.2).

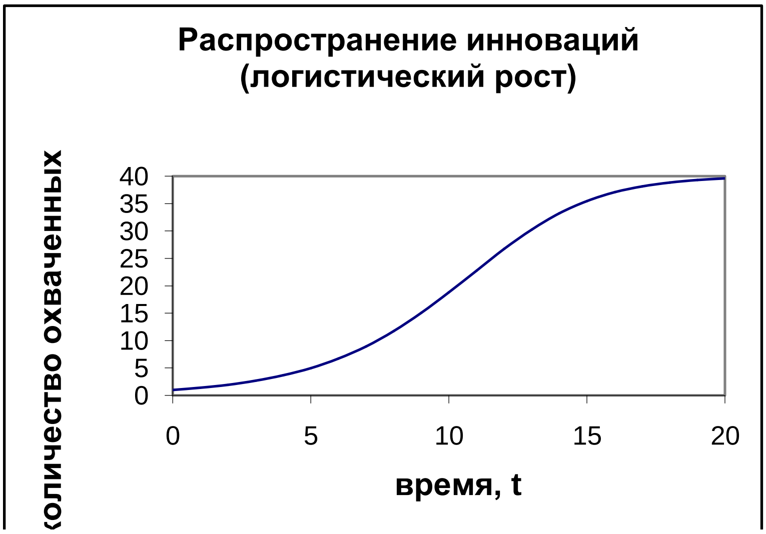


Рис. 3.2

Полученная кривая называется логистической. В таком случае говорят, что распространение инноваций идет по логистическому закону.
4. Маркируем колонки A, C и D, начиная с 4-й строки, и строим диаграмму типа ТОЧЕЧНАЯ (рис. 3.3), графики скорости и ускорения.
Процесс распространения инноваций имеет четко выраженные периоды (рис. 3.3): незначительный рост при $t \in [1;\ 3]$; увеличение скорости роста до максимального значения $t \in [4;\ 11]$; замедление скорости роста при $t \in [11;\ 19]$; насыщение (скорость роста практически равна нулю) при $t > 19$.

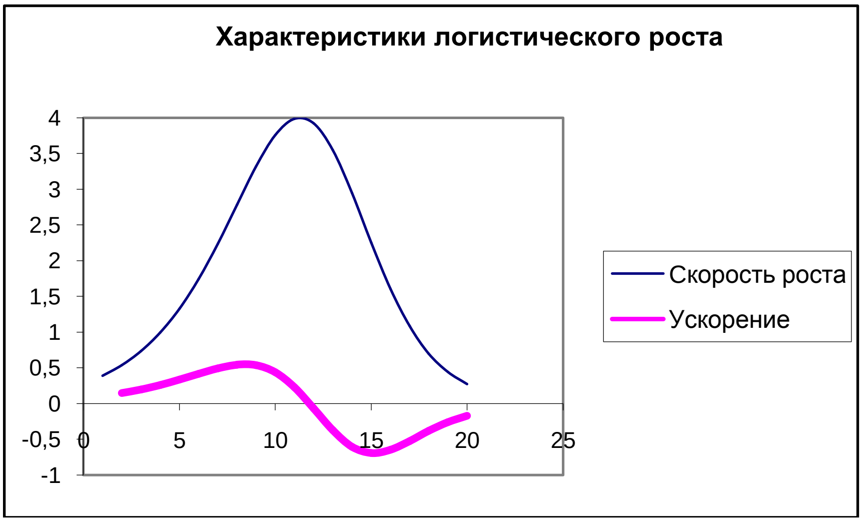


Рис. 3.3

§ 4. Модели “хищник-жертва”

Обозначения: N_0 – численность популяции зайцев (жертв), M_0 – численность популяции волков (хищников) в стартовый момент времени; N_t, M_t – численности популяций в t-й момент времени.

Предполагается, что зайцы располагают неограниченным пространством и неограниченным количеством пищи, а также, что волки питаются зайцами.

4.1. Модель М1. Отсутствие взаимодействия

Предполагается, что популяции не взаимодействуют, например, волков и зайцев разделяет стена, и, следовательно, волкам нечем питаться.

Прирост численности зайцев пропорционален текущей численности популяции (числу потенциальных семейных пар) и определяется по формуле

$$N_t - N_{t-1} = aN_{t-1},$$

где $a > 0$ – коэффициент прироста, который учитывает и коэффициент рождаемости, и коэффициент естественной смертности.

Из-за отсутствия пищи численность волков может только убывать, поэтому прирост (точнее, уменьшение) численности волков определяется по формуле

$$M_t - M_{t-1} = -bM_{t-1},$$

т.е. уменьшение пропорционально текущей численности волков с коэффициентом b .

Таким образом, рекуррентная модель имеет вид

$$N_0 = N0, \quad M_0 = M0 \text{ (стартовые значения)},$$

$$N_t = aN_{t-1} + N_{t-1},\ M_t = -bM_{t-1} + M_{t-1} \text{ (динамика)}$$

Задача 1. Промоделировать на промежутке $t = 1, 2, \ldots, 10$ динамику численности популяций по модели М1 с параметрами

$$N0 = 31,\ M0 = 9{,}5,\ a = 0{,}1,\ b = 0{,}3$$

и построить на одном точечном графике траектории M_t, N_t. Сделать выводы о характере процессов изменения численностей популяций.

	A	B	C	D	E	F
1	t	Зайцы	Волки			
2	0	31	9,5		a	0,1
3	1	=$F$2*B2+B2	=-$F$4*C2+C2			
4	2				b	0,3

Рис. 4.1

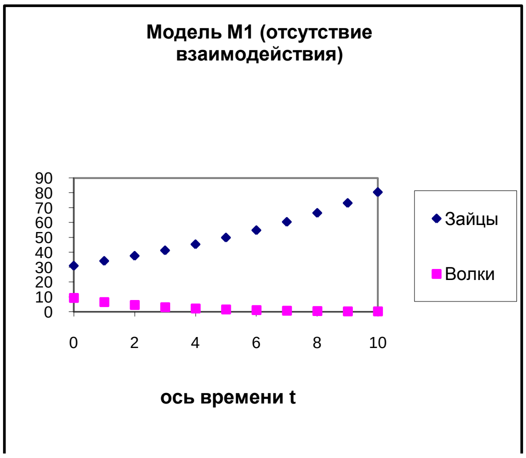


Рис. 4.2

Решение.

Заполним ячейки, как показано на рис. 4.1. Копируем формулы из B3, C3 на нужное количество ячеек вниз. По данным из колонок A, B, C строим график типа ТОЧЕЧНЫЙ (рис. 4.2).

4.2. Модель М2. Взаимодействие популяций

Предполагается, что популяции взаимодействуют (стену убрали), т.е. волки имеют доступ к пище (зайцам). В формуле для прироста численности зайцев появляется отрицательное слагаемое, учитывающее количество зайцев, ставших пищей для волков. Это количество пропорционально произведению численности волков и численности зайцев с коэффициентом пропорциональности $c > 0$. И тогда

$$N_t - N_{t-1} = aN_{t-1} - cN_{t-1}M_{t-1}.$$

В формуле для прироста численности волков появляется положительное слагаемое, отражающее факт естественной рождаемости волков при наличии пищи. Прирост пропорционален произведению числа потенциальных семейных пар и количества потенциальной пищи – численности зайцев, коэффициент пропорциональности $d > 0$. Имеем

$$M_t - M_{t-1} = -bM_{t-1} + dN_{t-1}M_{t-1}.$$

Таким образом, рекуррентная модель имеет вид:

$$N_0 = N0,\ M_0 = M0,$$

$$N_t = (a - c \cdot M_{t-1} + 1) \cdot N_{t-1},$$

$$M_t = (-b + d \cdot N_{t-1} + 1) \cdot M_{t-1}.$$

Задача 2. Промоделировать для $t = 1, 2, \ldots, 140$ динамику численности популяций по модели М2 с параметрами

$$N0 = 31,\ M0 = 9{,}5,\ a = 0{,}1,\ b = 0{,}3,\ c = 0{,}01,\ d = 0{,}01.$$

1. Построить на одном точечном графике траектории M_t, N_t. Ответ на рис. 4.2. Установить циклический характер динамики и оценить длину цикла (длину временного интервала между соседними пиками).
2. Построить фазовую траекторию процесса (точечный график зависимости численности волков в зависимости от численности зайцев $N = N(M)$). Выяснить характер спирали (закручивается или раскручивается с течением времени).

Решение.

1. Введем данные, как показано на рис. 4.3.

	A	B	C	D	E	F
1	t	Зайцы	Волки			
2	0	31	9,5		a	0,1
3	1	=($F$2-$F$3*C2+1)*B2	=(-$F$4+$F$5*B2+1)*C2		c	0,01
4	2				b	0,3
5	3				d	0,01

Рис. 4.3

2. Копируем формулы из B3 и C3 на нужное количество ячеек вниз.
3. Маркируем колонки A, B, C и построим диаграмму типа ТОЧЕЧНАЯ (рис. 4.4).

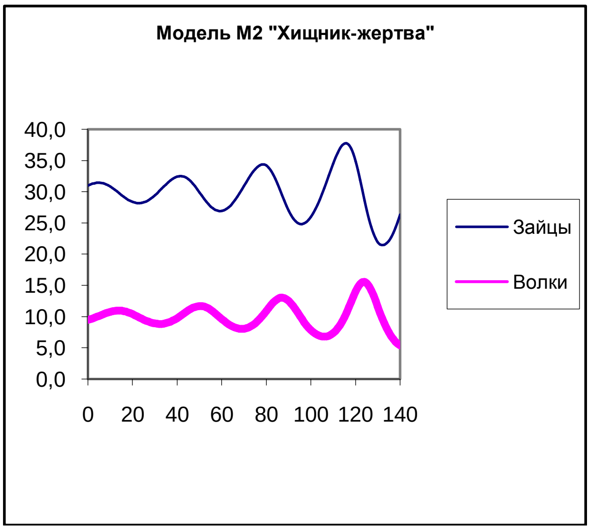


Рис. 4.4

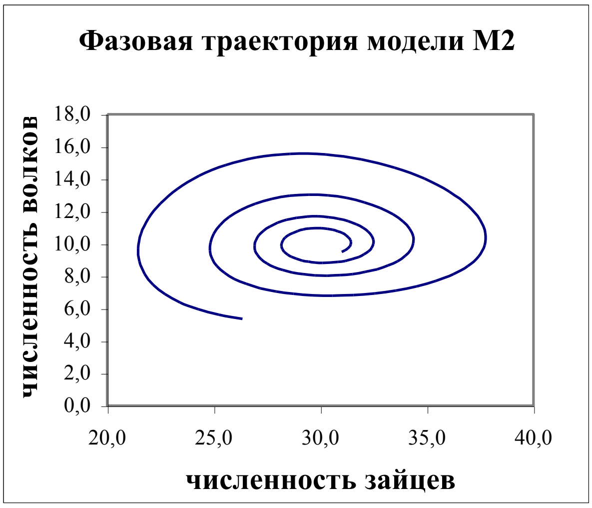


Рис. 4.5

Маркируем колонки B и C и строим диаграмму типа ТОЧЕЧНАЯ (рис. 4.5). График на диаграмме представляет фазовую траекторию $N = N(M)$.

Задача 3. В задаче 2 изменить стартовые численности популяций $N0 = 30$, $M0 = 10$. Прокомментировать результат. Вывести формулы для стартовых значений, при которых численности популяций не меняются со временем (зависимость $N0$ и $M0$ от параметров a, b, c и d).

4.3. Модель М3. Учет эффекта перенаселенности

Предполагается, что с увеличением численности зайцев начинает проявляться эффект перенаселенности, обусловленный ограниченностью пространства и нехваткой пищи. Чем выше плотность популяции, чем больше число встреч между особями, тем выше вероятность стрессов, конфликтов, заболеваний. Это приводит к уменьшению темпов прироста и увеличению смертности. Для учета этого обстоятельства в формулу динамики численности зайцев добавляется отрицательное слагаемое $-eN_{t-1}^2$. Число встреч между зайцами пропорционально квадрату их численности; $e-$ коэффициент пропорциональности. Таким образом, уравнение для прироста имеет вид

$$N_t - N_{t-1} = aN_{t-1} - cN_{t-1}M_{t-1} - eN_{t-1}^2.$$

В силу относительной малочисленности популяции волков эффект перенаселенности для них не учитывается, и уравнение для прироста остается таким же, как и в модели М2:

$$M_t - M_{t-1} = -bM_{t-1} + dN_{t-1}M_{t-1}.$$

Из уравнений для приростов получаем уравнения динамики

$$N_t = (a - cM_{t-1} - eN_{t-1} + 1) \cdot N_{t-1} \text{ (зайцы)},$$

$$M_t = (-b + dN_{t-1} + 1) \cdot M_{t-1} \text{ (волки)}.$$

Стартовые значения численностей задаются непосредственно: $N_0 = N0$, $M_0 = M0$.

Задача 4. Промоделировать для $t = 1, 2, \ldots, 140$ динамику численности популяций по модели М3 с параметрами

$$N0 = 45,\ M0 = 8,\ a = 0{,}1,\ b = 0{,}3,\ c = 0{,}01,\ d = 0{,}01,\ e = 0{,}002.$$

Построить на одном точечном графике траектории M_t, N_t. Прокомментировать характер динамики и оценить время установления равновесия. Оценить равновесные значения численностей популяций. Построить фазовую траекторию процесса (точечный график зависимости численности волков в зависимости от численности зайцев $N = N(M)$).

Выяснить характер спирали (закручивается или раскручивается с течением времени).

Решение.

1. Вводим данные, как показано на рис. 4.6.

	A	B	C	D	E	F
1	t					
2	0	45	8		a	0,1
3	1	=($F$3-$F$4*C2-$F$7*B2+1)*B2	=(-$F$5+$F$6*B2+1)*C2		c	0,01
4	2				b	0,3
5	3				d	0,01
6	4				e	0,002
7	5					

Рис. 4.6

2. Копируем формулы из B3,C3 вниз.
3. Маркируем столбцы A, B, C и строим диаграмму типа ТОЧЕЧНАЯ (рис. 4.7).
4. Маркируем столбцы B, C и строим фазовую траекторию (рис. 4.8).

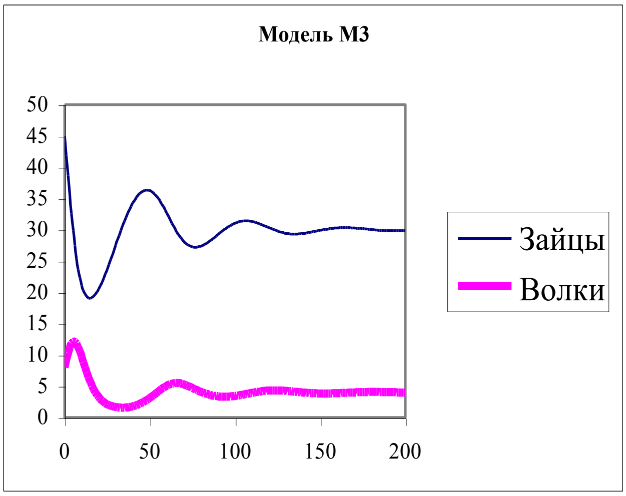


Рис 4.7

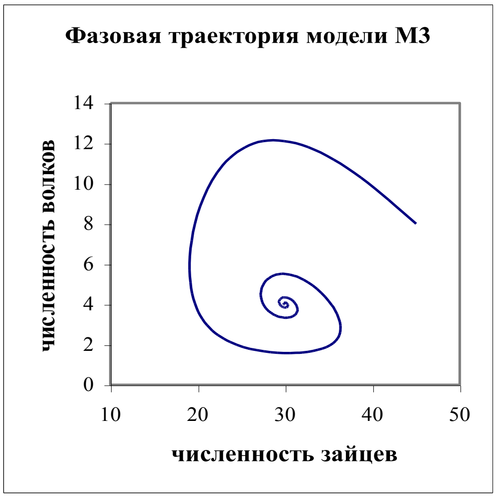


Рис. 4.8

Задача 5. Решить предыдущую задачу для различных пар стартовых значений численностей популяций: 1) $N0=45$, $M0=2$; 2) $N0=3$, $M0=2$; 3) $N0=3$, $M0=13$, остальные значения параметров:

$$N0=*,\ M0=*,\ a=0{,}1,\ b=0{,}3,\ c=0{,}01,\ d=0{,}01,\ e=0{,}002.$$

4.4. Краткая постановка задачи

Стартовые значения численностей зайцев и волков задаются непосредственно: $N_0 = N0$, $M_0 = M0$. Динамика задается формулами:

$$N_t = (a - cM_{t-1} - eN_{t-1} + 1)\cdot N_{t-1},\ M_t = (-b + dN_{t-1} + 1)\cdot M_{t-1},$$

где $a > 0$ – коэффициент естественного роста численности зайцев; $b > 0$ – коэффициент естественной смертности волков; $c > 0$ – темп истребления зайцев волками; $d > 0$ – темп прироста численности волков при наличии пищи; $e > 0$ – темп убыли численности зайцев из-за перенаселенности.

Задача 6. Найти траектории процессов N_t, M_t, t=1, 2 , … , 50, а также фазовую траекторию $N = N(M)$ для следующих значений управляемых параметров: $N0=$ 45, $M0=8$, $a=0{,}1$, $b=0{,}3$, $c=0{,}01$, $d=0{,}01$, $e=0{,}002$.

§ 5. *Модель Ричардсона гонки вооружений*

Пусть S_0– объем вооружений «синих», Z_0– объем вооружений «зеленых» в стартовый момент времени (начальные объемы); S_t, Z_t–объемы вооружений в t-й момент времени.

Уравнение Ричардсона для прироста (уменьшения) вооружений «синих» имеет вид:

$$S_t - S_{t-1} = a\cdot Z_{t-1} - c\cdot S_{t-1} + P,$$

где $a\cdot Z_{t-1}$ – прирост, обусловленный текущим объемом вооружения противника (чем больше объем вооружений «зеленых», тем больше инвестиции в производство вооружения «синих»), a – темп ответного наращивания «синих»; $-c\cdot S_{t-1}$ – износ (моральная и физическая амортизация) имеющихся вооружений, c – коэффициент износа «синих»; P – уровень настороженности (недоверия) «синих» (некоторая постоянная величина). Константы a, c, P положительны.

Аналогично выглядит уравнение Ричардсона для «зеленых»:

$$Z_t - Z_{t-1} = b\cdot S_{t-1} - d\cdot Z_{t-1} + Q,$$

где b – темп ответного наращивания, d – коэффициент износа, Q – уровень настороженности зелёных.

Из уравнений Ричардсона получаем рекуррентные формулы:

$$S_t = a\cdot Z_{t-1} - c\cdot S_{t-1} + P + S_{t-1},$$

$$Z_t = b\cdot S_{t-1} - d\cdot Z_{t-1} + Q + Z_{t-1}.$$

Стартовые значения задаются непосредственно: $S_0 = S0$, $Z_0 = Z0$.

Задача 1. Промоделировать процесс гонки вооружений на временном промежутке $t = 1, \dots, 50$ для следующих значений параметров:

$$S0 = 2{,}5,\ a = 0{,}08,\ c = 0{,}15,\ P = 0{,}1,$$

$$Z0 = 1{,}0,\ b = 0{,}10,\ d = 0{,}11,\ Q = 0{,}1.$$

Рассматривается случай одинакового взаимного недоверия ($P = Q = 0{,}1$). Построить графики процессов S_t, Z_t и установить предельные уровни вооружений. Построить фазовую траекторию $S = S(Z)$.

Решение.

1. Вводим данные, как показано на рис. 5.1.
2. Копируем формулы из B3, C3 вниз.
3. Маркируем данные из столбцов A, B, C и строим диаграмму ТОЧЕЧНАЯ (рис. 5.2).
4. Маркируем данные из столбцов B, C и строим фазовую траекторию процесса (рис. 5.3).

	A	B	C	D	E	F
1	t	Синие	Зеленые		a	0,08
2	0	2,5	1		c	0,15
3	1	=$F$1*C2-$F$2*B2+$F$3+B2	=$F$4*B2-$F$5*C2+$F$6+C2		P	0,1
4	2				b	0,1
5	3				d	0,11
6	4				Q	0,1

Рис. 5.1

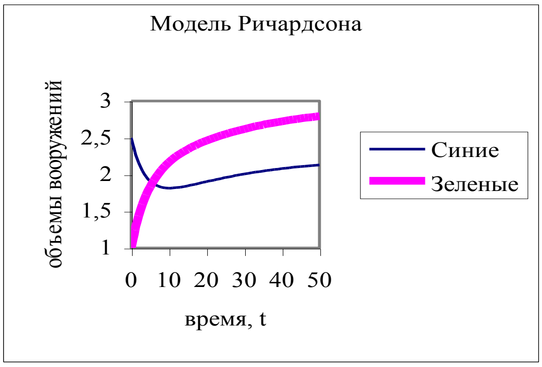


Рис. 5.2

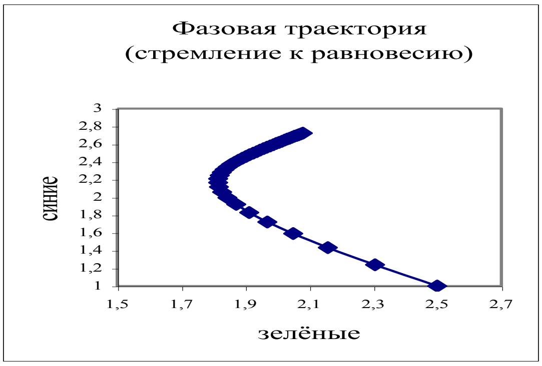


Рис. 5.3

Предельное значение объема вооружений «синих» приблизительно равно 2,22 ($S_{100} = 2{,}22$). Для «зеленых» предельное значение приблизительно равно 2,92 (Z_{100} = 2,92).

Задача 2. Решить задачу 1 при $S0 = 0$ («синие» вступают в гонку, не имея вооружений вообще), остальные значения параметров:

$$S0 = 0,\ a = 0{,}08,\ c = 0{,}15,\ P = 0{,}1,$$

$$Z0 = 1{,}0,\ b = 0{,}10,\ d = 0{,}11,\ Q = 0{,}1.$$

Ответ: рис. 5.4.

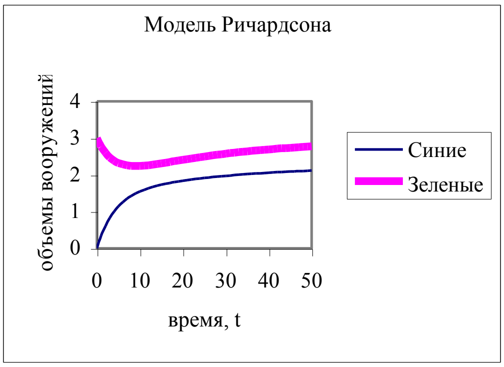


Рис. 5.4

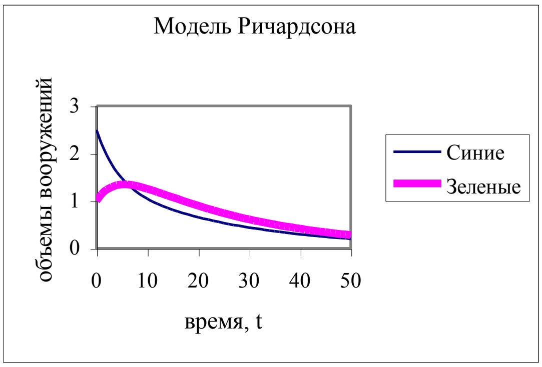


Рис. 5.5

Задача 3. Решить задачу 1, когда стартовые значения $S0$, $Z0$ равны предельным:

$$S0 = 2{,}24,\ a = 0{,}08,\ c = 0{,}15,\ P = 0{,}1,$$

$$Z0 = 2{,}94,\ b = 0{,}10,\ d = 0{,}11,\ Q = 0{,}1.$$

Ответ: объемы вооружений не меняются во времени (стационарный режим).

Задача 4. Отсутствует взаимное недоверие ($P = Q = 0$):

$$S0 = 2{,}5,\ a = 0{,}08,\ c = 0{,}15,\ P = 0,$$

$$Z0 = 1{,}0,\ b = 0{,}10,\ d = 0{,}11,\ Q = 0.$$

Ответ: рис. 5.5.

Объемы вооружений стремятся к нулю. В пределе наступает взаимное разоружение.

Задача 5. Решить задачу 1 при значениях параметров

$$S0 = 2{,}5,\ a = 0{,}10,\ c = 0{,}08,\ P = 0{,}10,$$

$$Z0 = 0{,}0,\ b = 0{,}10,\ d = 0{,}09,\ Q = 0{,}05.$$

Ответ: рис. 5.6.

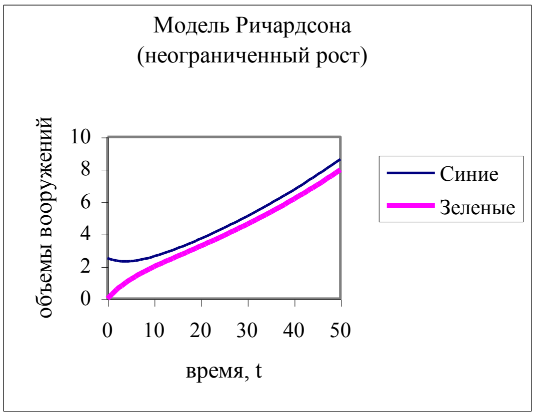


Рис. 5.6

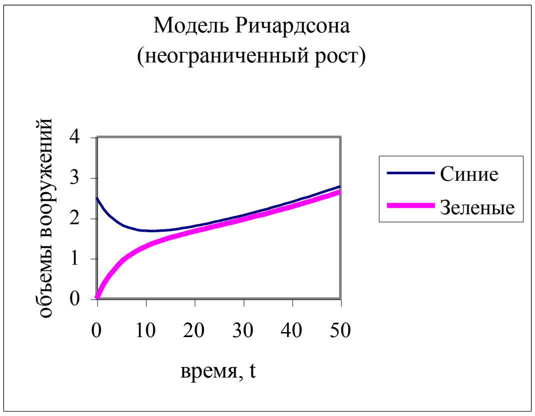


Рис. 5.7

Задача 6. Решить задачу 5 при отсутствии взаимного недоверия

$$S0 = 2{,}5,\ a = 0{,}10,\ c = 0{,}08,\ P = 0{,}0,$$

$$Z0 = 0{,}0,\ b = 0{,}10,\ d = 0{,}09,\ Q = 0{,}0.$$

Ответ: рис. 5.7. При данном наборе значений параметров, несмотря на отсутствие априорного взаимного недоверия вооружения, неограниченно растут из-за больших темпов ответного наращивания вооружений.

Можно показать, что условием неограниченного роста вооружений является выполнение неравенства $c \cdot d < a \cdot b$. Напротив, если выполнено противоположное неравенство (произведение коэффициентов амортизации больше произведения темпов ответного наращивания), вооружения стремятся к своим предельным значениям: «синие» к $\dfrac{aQ + dP}{cd - ab}$ и «зеленые» к $\dfrac{bP + dQ}{cd - ab}$.

5.1. Краткая постановка задачи

Стартовые значения уровня вооружения «синих» и «зеленых» задаются непосредственно:

$$S_0 = S0,\ Z_0 = Z0.$$

Динамика уровней вооружения задается формулами:

$$S_t = a \cdot Z_{t-1} + (1 - c) \cdot S_{t-1} + P,$$

$$Z_t = b \cdot S_{t-1} + (1 - d) \cdot Z_{t-1} + Q,$$

где a – темп ответного наращивания вооружения «синих», c – коэффициент износа (амортизации) вооружения «синих», P – уровень априорной настороженности (недоверия) «синих», b – темп ответного наращивания вооружения зелёных, d – коэффициент износа вооружения зелёных, Q – уровень априорной настороженности зелёных.

Задача 7. Найти траектории процессов S_t, Z_t, t=1, 2 , … , 40, а также фазовую траекторию $S = S(Z)$ для следующих значений управляемых параметров:

$$S0 = 10,\ a = 0{,}03,\ c = 0{,}01,\ P = 0{,}07,$$

$$Z0 = 0,\ b = 0{,}09,\ d = 0{,}02,\ Q = 0{,}08.$$

Вычислить на сколько процентов S_{40} отличается от Z_{40}?

§ 6. *Модель Ланчестера боевых действий*

Обозначения: S_0 – численность армии «синих», Z_0 – численность армии «зеленых» в стартовый момент времени (начальные численности); S_t, Z_t – численности армий в t-й момент времени. Если в какой-то момент времени одна из численностей обращается в нуль, то данная армия считается потерпевшей поражение.

Уравнение Ланчестера для прироста (уменьшения) «синих» имеет вид:

$$S_t - S_{t-1} = -a \cdot Z_{t-1} - c \cdot S_{t-1} + P,$$

где $-a \cdot Z_{t-1}$ –потери, обусловленных боевыми действиями противника (чем больше численность «зеленых», тем больше потери «синих»), a – коэффициент боевых потерь «синих» или эффективности боевых действий зелёных; $-c \cdot S_{t-1}$ – небоевые потери, обусловленная болезнями, травмами, неэффективностью управления в период подготовки боевых действий (чем больше численность «синих», тем больше их небоевые потери); P – скорость поступления подкреплений (некоторая постоянная величина). Константы a, c , P положительны.

Аналогично выглядит уравнение Ланчестера для «зеленых»:

$$Z_t - Z_{t-1} = -b \cdot S_{t-1} - d \cdot Z_{t-1} + Q.$$

Из уравнений Ланчестера получаем рекуррентные формулы:

$$S_t = -a \cdot Z_{t-1} - c \cdot S_{t-1} + P + S_{t-1},$$

$$Z_t = -b \cdot S_{t-1} - d \cdot Z_{t-1} + Q + Z_{t-1}.$$

Стартовые значения задаются непосредственно: $S_0 = S0,\ Z_0 = Z0.$

	A	B	C	D	E	F
1	t	Синие	Зеленые		a	0,2
2	0	2,5	1		c	0,1
3	1	=-$F$1*C2-$F$2*B2+$F$3+B2	=-$F$4*B2-$F$5*C2+$F$6+C2		P	0,1
4	2				b	0,2
5	3				d	0,1
6	4				Q	0,3

Рис. 6.1

Задача 1. Промоделировать боевые действия на временном промежутке $t = 1, \dots , 20$ для следующих значений параметров:

$$S0 = 2{,}5,\ a = 0{,}2,\ c = 0{,}1,\ P = 0{,}1,$$

$$Z0 = 1{,}0,\ b = 0{,}2,\ d = 0{,}1,\ Q = 0{,}3.$$

Эффективности действий армий одинаковы ($a = b$). Темпы небоевых потерь одинаковы ($c = d$). Начальная численность «синих» в 2,5 раза превышает начальную численность «зеленых», но зато скорость поступления подкреплений у «зеленых» в 3 раза больше, чем у «синих». Построить графики процессов S_t, Z_t и прокомментировать результат. Построить фазовую траекторию $S = S(Z)$.

Решение.

1. Вводим данные, как показано на рис. 6.1.
2. Копируем формулы из B3, C3 вниз.
3. Маркируем данные из столбцов A, B, C и строим диаграмму ТОЧЕЧНАЯ (рис. 6.2).
4. Маркируем данные из столбцов B, C и строим фазовую траекторию (рис. 6.3).

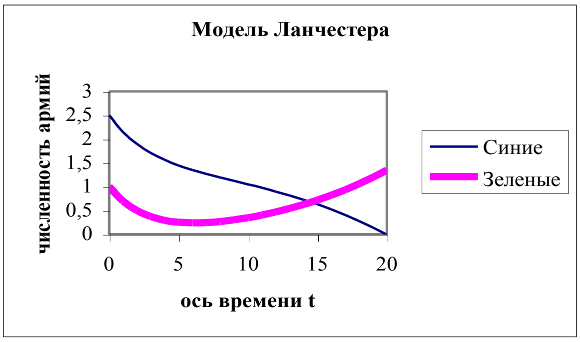


Рис. 6.2

Рис. 6.3

Армия «зеленых» несмотря на критическое положение при t=6 (ее численность в этот момент принимает наименьшее значение и составляет всего 18% от численности «синих») в конечном итоге одерживает победу на 20-м шаге.

Задача 2. Решить задачу 1 при трехкратном превышении начальной численности «синих»: $S0 = 3,\ a = 0{,}2,\ c = 0{,}1,\ P = 0{,}1,$

$$Z0 = 1,\ b = 0{,}2,\ d = 0{,}1,\ Q = 0{,}3.$$

Ответ: армия «зеленых» потерпит поражение на 4-м шаге (рис. 6.4).

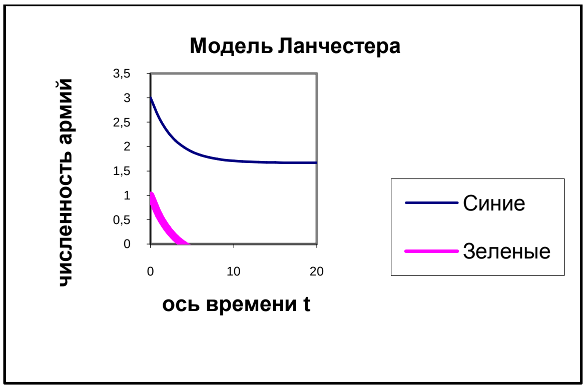


Рис. 6.4.

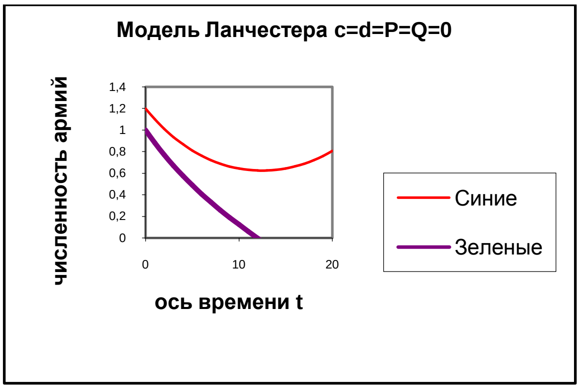


Рис. 6.5.

Задача 3. Определить, при каком наименьшем начальном значении численности $S0_{мин}$ «синие» одержат победу. Ответ дать с точностью до 0,01. Остальные значения параметров:

$$S0 = ?,\ a = 0{,}2,\ c = 0{,}1,\ P = 0{,}1,$$

$$Z0 = 1,\ b = 0{,}2,\ d = 0{,}1,\ Q = 0{,}3.$$

Задача 4. Найти траектории для следующих значений параметров:

$$S0 = 1{,}2,\ a = 0{,}1,\ c = 0,\ P = 0;$$

$$Z0 = 1{,}0,\ b = 0{,}1,\ d = 0,\ Q = 0.$$

Комментарий. Подкрепления не поступают ($P = Q = 0$), отсутствуют небоевые потери ($c = d = 0$). Процесс целиком определяется начальными численностями ($S0$, $Z0$) и эффективностями боевых действий (коэффициентами a и c).

Ответ: превышение начальной численности «синих» (1,2 > 1) при прочих равных условиях обеспечивает им победу на 12-м шаге (рис. 6.5).

Задача 5. Проверить, что при увеличении начальной численности «зеленых» в 1,2 раза (при $Z0 = 1{,}2$), наступит полное равенство и боевые действия закончатся ничьёй (траектории сольются в одну линию, стремящуюся к нулю). Значения параметров:

$$S0 = 1{,}2,\ a = 0{,}1,\ c = 0,\ P = 0;$$

$$Z0 = 1{,}2,\ b = 0{,}1,\ d = 0,\ Q = 0.$$

Задача 6. Найти наименьшее значение коэффициента эффективности боевых действий «зеленых» $a_{мин}$ для достижения ничьи. Остальные значения параметров:

$$S0 = 1{,}2,\ a = ?,\ c = 0,\ P = 0;$$

$$Z0 = 1{,}0,\ b = 0{,}1,\ d = 0,\ Q = 0.$$

Для найденного значения $a_{мин}$ построить графики траекторий.

Ответ: $a_{мин}$=1,44. График на рис. 6.6.

Задача 7. Сделать вывод о том, что важнее, “число” «зеленых» $Z0$ или их ”умение” a.

Ответ: к ничьей приводит или увеличение $Z0$ в 1,2 раза, или увеличение a в 1,44 раза. Таким образом, эффект от увеличения коэффициента a меньше, чем от такого же увеличения числа $Z0$. Можно показать, что ничья наступает при выполнении условия

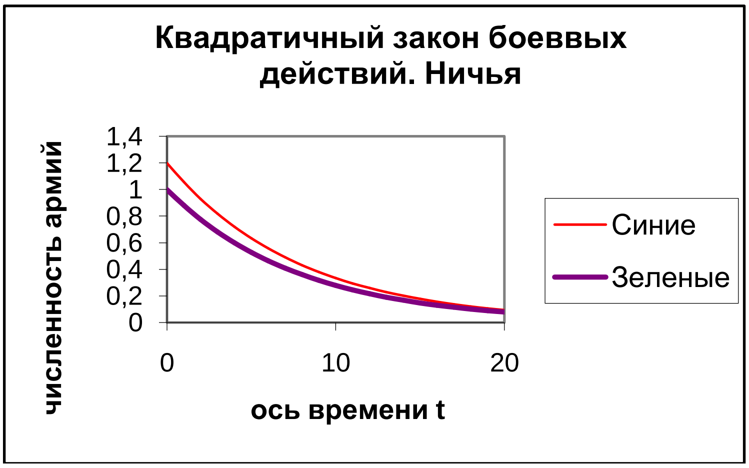


Рис. 6.6

$$S0^2 \cdot b = Z0^2 \cdot a,$$

что в специальной литературе называется квадратичным законом боевых действий.

6.1. Краткая постановка задачи.

Стартовые значения численностей армий «синих» и «зеленых» задаются непосредственно: $S_0 = S0,\ Z_0 = Z0$. Динамика определяется соотношениями:

$$S_t = -a \cdot Z_{t-1} + (1-c) \cdot S_{t-1} + P,$$

$$Z_t = -b \cdot S_{t-1} + (1-d) \cdot Z_{t-1} + Q,$$

где a – коэффициент эффективности боевых действий зелёных, c – коэффициент небоевых потерь «зеленых», P – скорость поступления подкреплений «зеленых», b – коэффициент эффективности боевых действий «синих», d – коэффициент небоевых потерь «синих», Q – скорость поступления подкреплений «синих».

Задача 8. Найти траектории процессов S_t, Z_t, t=1, 2 , … , 40, а также фазовую траекторию $S = S(Z)$ для следующих значений управляемых параметров:

$$S0 = 1{,}5,\ a = 0{,}1,\ c = 0{,}1,\ P = 0{,}1;$$

$$Z0 = 1{,}0,\ b = 0{,}3,\ d = 0{,}08,\ Q = 0{,}3.$$

§ 7. Влияние инвестиционной политики на экономический рост

Обозначим K – производственные фонды (основной капитал); Y – конечный продукт (ВВП, доход); C – фонд непроизводственного (личного) потребления; I – инвестиции в производство. Время t измеряется в годах.

Рассматривается следующая динамическая модель экономического процесса.

Начальный этап процесса состоит в мобилизации стартового капитала K_0. Далее следуют циклы, состоящие из фазы производства и фазы распределения.

Фаза производства: труд вместе с капиталом производят доход. Предполагается, что либо затраты труда постоянны, либо труд не является дефицитным ресурсом, поэтому прирост дохода определяется только приростом капитала: $Y = Y(K)$.

Фаза распределения: доход Y расходуется на инвестиции I и личное потребление C.

$$Y = I + C.$$

Фазы производства и распределения характеризуются *изменением капитала*: выбытием (амортизацией) и пополнением за счет инвестиций:

$$\Delta K = -b \cdot K + I.$$

7.1. Модель 1. Управление инвестициями

Уравнение первой фазы (фазы производства)

$$Y_t = A \cdot K_t + B,$$

где A – коэффициент капиталоемкости (технологичности) производства, B – свободный член. Уравнения второй фазы:

$$I_t = d_t \cdot Y_t,$$

$$C_t = (1 - d_t) \cdot Y_t,$$

где d_t – норма инвестиций в t-й момент. Уравнение динамики капитала

$$K_{t+1} = K_t - b \cdot K_t + I_t,$$

где b – норма выбытия (амортизации) капитала (фондов).

Неуправляемые параметры A, B, b отражают технологический уровень производства.

Управляемые параметры K_0, d_t выбираются лицами, принимающими решения. Выбор управляемых параметров называется *инвестиционной* политикой. Назначение модели состоит в исследовании влияния инвестиционной политики на характеристики экономического процесса.

Задача 1. Промоделировать динамику для случая постоянного значения нормы инвестиций: $d_t = d$, t = 0, 1,…, 15. Параметры модели: K_0 =10, A =0,3, B=3, b =0,05, d =0,6.

Построить график процесса Y_t и установить характер роста (линейный или экспоненциальный). Меняя значение нормы инвестиций, выяснить, при каких значениях d происходит экономический спад? Построить график “спада”.

Решение.

1. Присвоим ячейкам B3,C3,D3 и E3 имена A, bb, b, d и заполним их значениями 0,3, 3, 0,05, 0,6 (рис. 7.1). В пользовательских именах ячеек большие и малые буквы не различаются, поэтому для параметра B используем в качестве имени bb.

	A	B	C	D	E
1	**Параметры модели**				
2	K_0	A	B	b	d
3	10	0,3	3	0,05	0,6
4					
5	t	K	Y	I	C
6	0	=10	=A*B6+bb	=d*C6	=(1-d)*C6
7	1	=B6-b*B6+D6			

Рис. 7.1

2. Вводим в столбец A модельное время от 0 до 15. Формулы из ячеек B7, C6, D6 и E6 копируем вниз до 21-й строки.

3. Маркируем неприлегающие диапазоны A5:A21 и C5:C21 и строим график типа ТОЧЕЧНЫЙ (рис. 7.2).

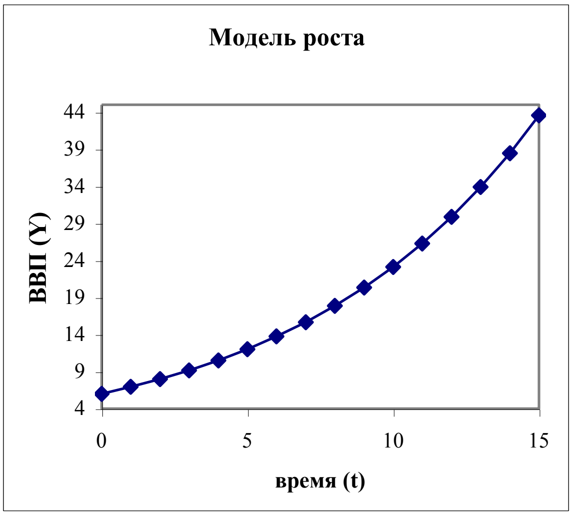


рис. 7.2

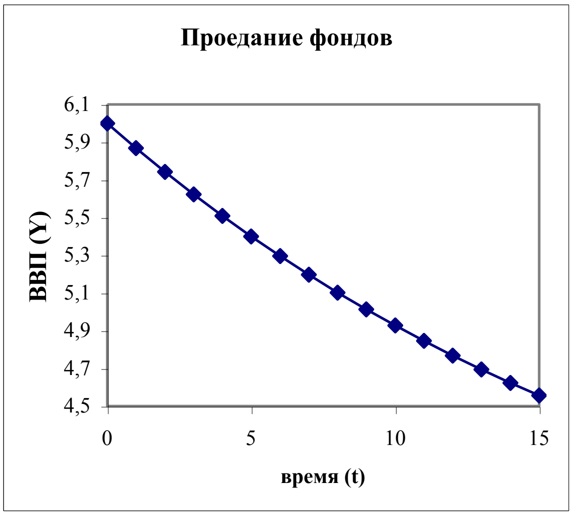


Рис. 7.3

Уменьшая параметр d, находим значение, при котором процесс Y_t начинает убывать. Это состояние называется “проеданием” фондов (рис. 7.3).

Задача 2. Найти значения норм инвестиций $d_0, d_1, d_2, \ldots, d_{10}$, которые обеспечивают максимум суммы личного потребления за 11 периодов (от нулевого до десятого) при условиях, что личное потребление всегда должно быть не меньше 2:

$$C_t \geq 2;$$

величина капитала в 10-м периоде должна быть не меньше 60:

$$K_{10} \geq 60;$$

нормы инвестиций должны лежать в границах от 0,1 до 0,8: $0{,}1 \leq d_t \leq 0{,}8$.

Решение.

1. В этой модели норма инвестиций в каждом периоде своя. Добавим столбец F6:F16, содержащий ежегодные нормы инвестиций, и изменим формулы для вычисления I_t и C_t (рис. 7.4).

2. Стартовые значения норм инвестиций положим равными 0,5.

3. Вводим в ячейку E17 общий объем потребления за все время моделирования: =СУММА(E6:E16).

4. Запускаем программу ПОИСК РЕШЕНИЯ и устанавливаем параметры поиска:

целевая ячейка E17
цель поиска максимум
изменяя ячейки F6:F16
ограничения B16>=60; E6:E16>=2; F6:F16<=0,8; F6:F16>=0,1

	A	B	C	D	E	F
1	Параметры модели					
2	K_0	A	B	b		
3	10	0,3	3	0,05		
4						
5	t	K	Y	I	C	d_t
6	0	=10	=A*B6+bb	=F6*C6	=(1-F6)*C6	0,5
7	1	=B6-b*B6+D6				

Рис. 7.4

При установки ограничений в поле ССЫЛКА НА ЯЧЕЙКУ методом указания вводим сразу весь диапазон ячеек, которые должны удовлетворять одному и тому же условию { E6:E16>=0 } (рис. 7.5)

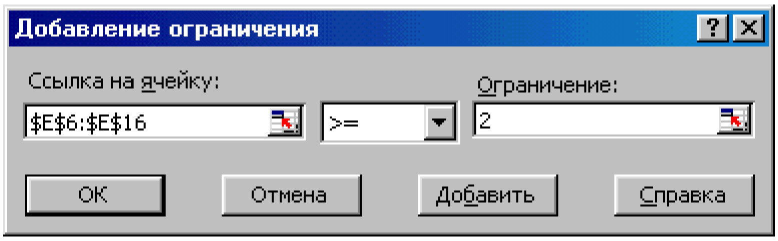


Рис. 7.5

Максимальное суммарное потребление равно 89,77 и достигается при следующих значениях норм накоплений d_0=0,66, d_1 =0,72, d_2 =0,76, d_3=0,8, d_4=0,8 и т. д. (рис. 7.6).

Общий вывод: на первых этапах надо вкладывать в производство как можно больше средств, не доводя, однако, уровень текущего потребления до отметки ниже запрещенного уровня (именно этим объясняется, что первые три этапа норма накопления меньше максимально допустимой).

5	t	K	Y	I	C	d_t
6	0	10,00	6,00	4,00	2,00	0,67
7	1	13,50	7,05	5,05	2,00	0,72
8	2	17,88	8,36	6,36	2,00	0,76
9	3	23,34	10,00	8,00	2,00	0,80
10	4	30,18	12,05	9,64	2,41	0,80
11	5	38,31	14,49	11,60	2,90	0,80
12	6	47,99	17,40	13,92	3,48	0,80
13	7	59,51	20,85	5,32	15,53	0,26
14	8	61,86	21,56	2,16	19,40	0,10
15	9	60,92	21,28	2,13	19,15	0,10
16	10	60,00	21,00	2,10	18,90	0,10
17					89,77	

Рис. 7.6

7.2. Модель 2. Постоянный темп роста непроизводственного потребления

Модель характеризуется следующей инвестиционной политикой:

а) непроизводственное потребление в стартовом периоде полагается равным C_0 и планируется увеличивать из года в год с постоянным темпом f:

$$C_{t+1} = C_t \cdot (1 + f);$$

б) на долю инвестиций приходится оставшаяся часть конечного продукта:

$$I_t = Y_t - C_t.$$

Уравнение первой фазы и уравнение динамики капитала остались без изменения

$$Y_t = A \cdot K_t + B, \quad K_0 = const, \quad K_{t+1} = K_t - b \cdot K_t + I_t,$$

Неуправляемые параметры: A, B, b. *Управляемые* параметры: K_0, C_0 f (стартовое значение капитала, уровня потребления и темп прироста уровня потребления).

Определение максимально возможного темпа прироста дохода

Задача 3. Меняя значения K_0 в интервале [5; 15], например, с шагом 2, оценить максимально возможный темп прироста производства. Для этого предположить, что основные фонды не изнашиваются (b = 0) и все ресурсы идут на инвестиции (потребление равно нулю C_0 = 0). Построить графики процессов для t = 0, 1, … , 20 при K_0 = 10.

Решение.

В данной постановке параметры модели равны

$$A = 0{,}3,\ B = 3,\ b = 0,\ C_0 = 0,\ f = 0.$$

Цепной темп прироста за период определяется соотношением

$$\frac{Y_{t+1} - Y_t}{Y_t} = \frac{Y_{t+1}}{Y_t} - 1.$$

1. Присвоим ячейкам A2, B2, C2, D2, E2, F2 имена, как показано на рис. 7.7 и заполним их соответствующими значениями.

	A	B	C	D	E	F
1	Параметры модели					
2	K_0	A	**B**	b	C0	f
3	10	0,3	3	0	0	0
4						
5	t	K	Y	I	C	Y_{t+1}/Y_t
6	0	=10	=A*B6+bb	=C6-E6	=C0	
7	1	=B6-b*B6+D6			=E6*(1+f)	=C7/C6-1
8	2					

Рис. 7.7

2. В столбец A, начиная с ячейки A6, внесем значения времени от 0 до 20.
3. Формулы из ячеек B7, C6, D6, E7 и F7 копируем вниз.

Вывод. Максимально возможный темп прироста равен коэффициенту капиталоемкости производства A, т.е. 0,3.

Оценка влияния нормы амортизации на максимально возможный темп прироста дохода

Задача 4. Установить характер изменения темпа прироста дохода и построить соответствующие графики для следующих значений параметров K_0 = 10, A = 0,3, B = 3, C_0 = 3, f = 0, меняя значения нормы амортизации b от 0 до 0,3 с шагом 0,05.

Ответ: при b = 0 темп прироста с течением времени стремится к максимально возможному значению 0,3 (рис. 7.8).

При b=0,1 темп прироста с течением времени стремится к значению $A-b$=0,2 (рис. 7.9).

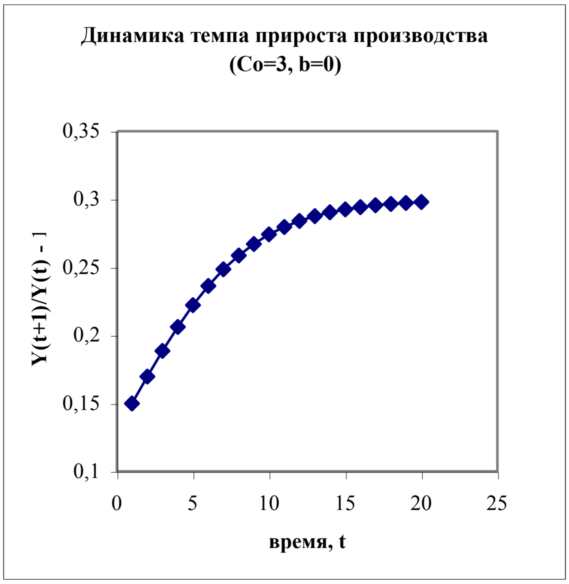


Рис. 7.8

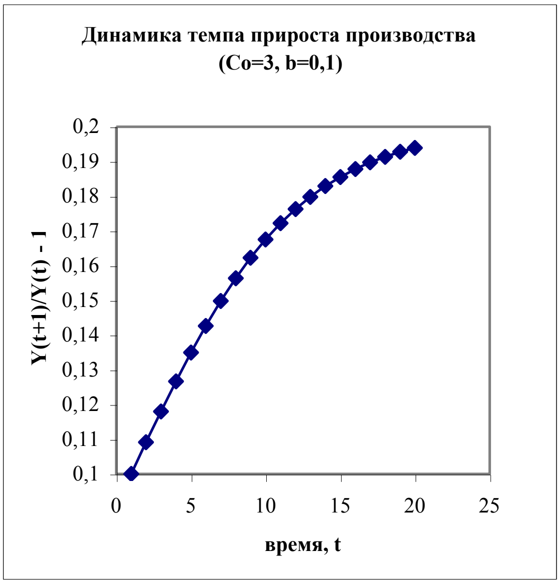


Рис. 7.9

Определение максимально возможного темпа прироста уровня потребления

Задача 5. Зафиксировать параметры $K_0 = 10$, $A = 0{,}3$, $B = 3$, $b = 0$, $C_0 = 3$, $f = 0$. Изменяя темп прироста потребления f от 0,1 до 0,2 с шагом 0,01, установить максимально возможное значение f_{max}, которое может быть обеспечено моделируемой экономикой. На рис. 7.10 и 7.11 приведены графики процессов для значений $f = 0{,}1$ и $f = 0{,}2$.

В первом случае темп прироста дохода стремится к предельному значению 0,3. Во втором случае ясно видно, что экономика не в состоянии поддерживать заданный темп прироста потребления: темп прироста дохода сначала падает, затем становится отрицательным. Через некоторое время сам доход становится равным нулю, после чего модель теряет экономический смысл.

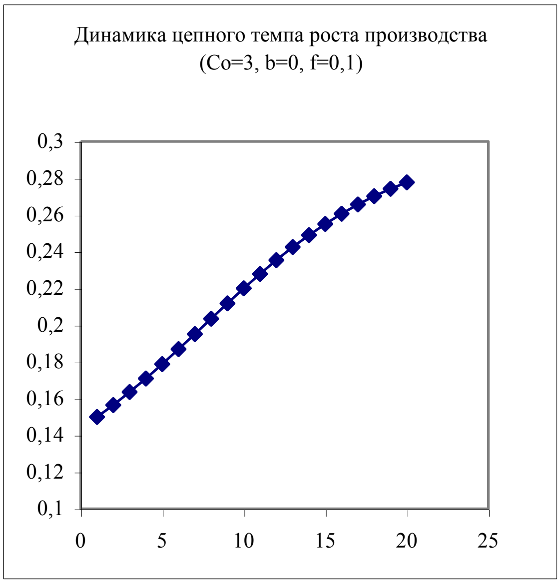


Рис. 7.10

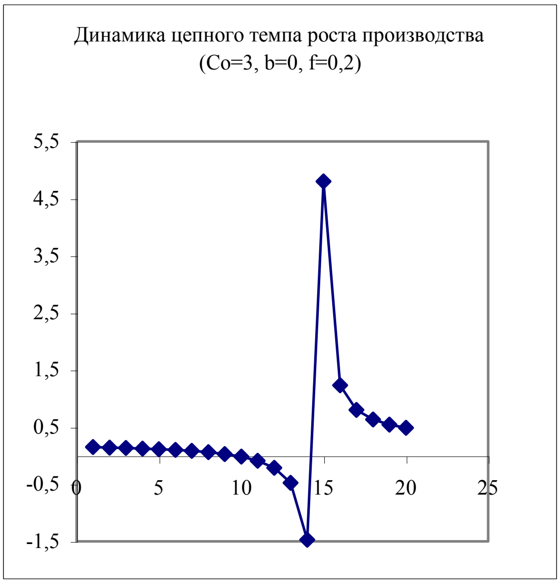


Рис. 7.11

Оценка влияния стартового уровня потребления на максимально возможный темп прироста уровня потребления

Задача 6. Зафиксировать параметры $K_0 = 10$, $A = 0{,}3$, $B = 3$, $b = 0$. Для каждого значения C_0 из множества {1; 2; 3; 4; 5; 5,5} установить максимально возможный темп прироста уровня потребления $f_{max}(C_0)$.

Ответ: при $C_0 = 1$ $f_{max}(C_0) = 0{,}25$. При $C_0 = 5{,}5$ $f_{max}(C_0) = 0{,}025$.

§ 8. Модель Солоу[1] экономического роста[2]

Пусть L – число занятых в производстве; K – производственные фонды (основной капитал); Y – конечный продукт (ВВП, доход); C – фонд непроизводственного (личного) потребления; I – инвестиции в производство; K/L – фондовооруженность одного занятого; C/L – среднедушевое потребление (на одного занятого). Время t измеряется в годах.

Рассматривается следующая динамическая модель экономического процесса.

Численность занятых в производстве растет с постоянным темпом a

$$L_{t+1} = L_t \cdot (1+a).$$

Конечный продукт определяется функцией Кобба-Дугласа

$$Y_t = A \cdot K_t^{0,3} \cdot L_t^{0,7}.$$

Часть конечного продукта идет на инвестиции (d – норма инвестиций),

$$I_t = d \cdot Y_t,$$

остальная часть идет на непроизводственное потребление

$$C_t = (1-d) \cdot Y_t.$$

Фонды изнашиваются и пополняются за счет инвестиций (b – коэффициент выбытия или амортизации фондов).

$$K_{t+1} = K_t - b \cdot K_t + I_t$$

8.1. Изучение процесса установления стационарного режима

Задача 1. Промоделировать динамику процессов на интервале времени [0; 40] для следующих значений параметров:

$$A=10,\ L_0 = 10,\ K_0 = 60,\ a = 0{,}05,\ b = 0{,}1,\ d = 0{,}2.$$

Построить график фондовооруженности и график зависимости среднедушевого потребления от времени (на двух разных диаграммах).

G	H	I	J	K
C/L	K/L	a	0,05	темп роста насел.
=F3/B3	=C3/B3	b	0,1	выбытие фондов
		d	0,2	норма накопления

---

[1] Солоу (Solow) Роберт, американский экономист, лауреат Нобелевской премии (1987).

[2] Курс экономической теории. Под ред. М. Н. Чепурина, Е. А. Киселевой: АСА, Киров, 1999, стр. 568.

Решение.

1. Присвоим ячейкам J2, J3, J4 имена a, b, d соответственно и заполним их значениями 0,05, 0,1 и 0,2 (рис. 8.1).
2. Заполним таблицу, как показано на рис. 8.2.
3. В колонку А введем годы от 0 до 40.
3. Скопируем формулы из ячеек B4, C4, D3, E3, F3, G3, H3 вниз.
4. Маркируем колонку A и колонку G и строим ТОЧЕЧНЫЙ график (рис. 8.3).

	A	B	C	D	E	F
1						
2	**t**	**L**	**K**	**Y**	**I**	**C**
3	**0**	**10**	**60**	**=10*B3^0,7*C3^0,3**	**=d*D3**	**=(1-d)*D3**
4	**1**	**=B3*(1+a)**	**=C3-b*C3+E3**			

Рис. 8.2

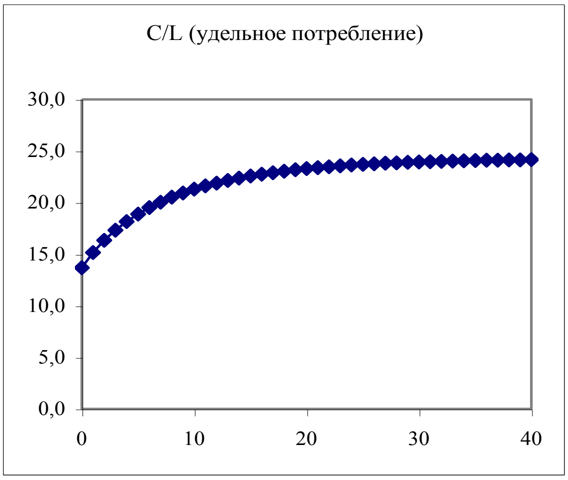


Рис. 8.3

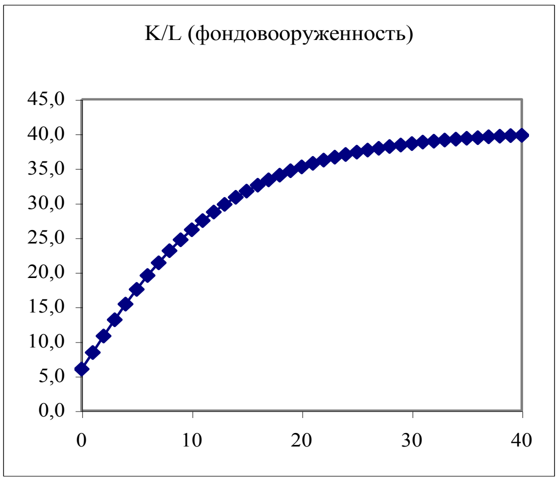


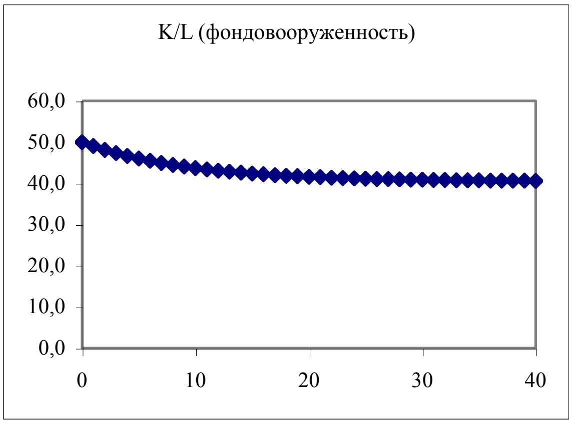
Рис. 8.4

Маркируем колонку A и H и строим ТОЧЕЧНЫЙ график (рис. 8.4). Как видно из графиков оба процесса стремятся к предельным (стационарным) значениям: удельное потребление к значению 24, фондовооруженность к значению 42.

Задача 2. Получить картину процессов для следующих значений K_0: 300, 400, 500, 600 (остальные параметры “заморожены”):

$$A=10,\ L_0 = 10,\ K_0=*,\ a = 0{,}05,\ b = 0{,}1,\ d = 0{,}2.$$

Убедиться в том, что при некоторых значениях K_0 процессы приобретают убывающий характер (рис. 8.5 и 8.6). Установить граничное значение K_0, которое разделяет все траектории на возрастающие и убывающие. Убедиться в том, что предельные значения процессов не зависят от стартового значения фондовооруженности K_0.



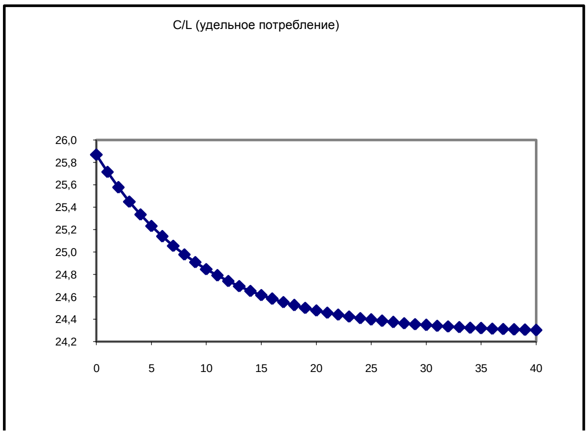


Рис. 8.5 Рис. 8.6

8.2. Выявление оптимальной нормы накопления

Задача 3. Изучить влияние на процессы нормы инвестиций d. Для этого зафиксировать K_0=600 и получить результаты для значений d от 0 до 0,5 с шагом 0,05. Остальные значения параметров:

$$A=10,\ L_0 = 10,\ K_0=600,\ a = 0{,}05,\ b = 0{,}1,\ d = *.$$

Составить таблицу предельных (стационарных) значений по образцу (рис. 8.7). В качестве предельных взять значения для t = 40. Выявить оптимальную норму накопления d_{opt}, при которой среднедушевое потребление в стационарном режиме максимально.

d	0	0,05	0,1	0,2	0,25	0,3	0,35	0,4	0,45
K_{40}/L_{40}									
C_{40}/L_{40}									

Рис. 8.7

Вывод. В модели Солоу при любых d и K_0 процессы выходят на стационарный режим, характеристики которого зависят только от нормы инвестиций d. Следовательно, существует d_{opt}, которое обеспечивает максимальное среднедушевое потребление. Дальнейшее увеличение среднедушевого потребления возможно только за счет технологического прогресса, который моделируется увеличением параметра A в производственной функции Кобба-Дугласа.

§ 9. *Модель Эванса установления равновесной цены*

Пусть p – цена товара (price); $D(p)$ – спрос на товар при цене p (Demand), $S(p)$ – предложение товара при цене p (Supply); p_0 – стартовая цена; p_t – цена в t – й момент времени. Обозначим также $D_t=D(p_t)$, $S_t=S(p_t)$.

Динамика цены (изменение в результате избыточного спроса или избыточного предложения) моделируется следующим рекуррентным соотношением:

$$P_{t+1}=P_t+K\cdot(D_t-S_t)$$

где K – коэффициент, отражающий скорость процесса. Таким образом, если спрос на предыдущем шаге был больше предложения, цена на очередном шаге увеличится, и наоборот, при избыточном предложении на предыдущем шаге, цена на следующем шаге уменьшится. Стартовое значение цены задается непосредственно $P_0=P0$.

9.1. Степенные функции спроса и предложения

Спрос и предложение моделируются степенными функциями

$$D(p)=\frac{A}{p^{\alpha}},\ S(p)=B\cdot p^{\beta}.$$

Задача 1. Найти равновесную цену и время, за которое она установится для следующих данных (t =0, 1, 2, …, 30):

$$P0=1\ ;\ D(p)=\frac{60}{p^{1,1}}\ ,\ S(p)=20\cdot p^{0,5}\ ,\ K=0{,}012.$$

При расчетах учитывать 2 десятичных знака после запятой. Построить на одной диаграмме графики процессов D_t, S_t, p_t для t =0, 1, …, 10. С помощью ПОИСКА РЕШЕНИЯ найти равновесные значения процессов с точностью до 4-х знаков после запятой.

Решение.

1. Заполним таблицу, как показано на рис.
2. Присвоим ячейкам A2, B2, C2, D2 и F2 имена *K*, *A*, *alfa*, *B* и *beta* соответственно.

	A	B	C	D	F
1	K	A	alfa	B	beta
2	0,012	60	1,1	20	0,5
3					
4	t	p_t	D_t	S_t	
5	0	1,0	=A/B5^alfa	=B*B5^beta	
6	1	=B5+K*(C5–D5)			

Рис. 9.1

3. Копируем формулы из ячеек B6, C5, B5 вниз.
4. Маркируем диапазон A4:D15 и строим график типа ТОЧЕЧНЫЙ с логарифмической шкалой OY (рис. 9.2).

Ответ: на 26-м шаге спрос и предложение сравняются ($D_{26}=S_{26}=28{,}19$), цена равновесия $p=1{,}99$.

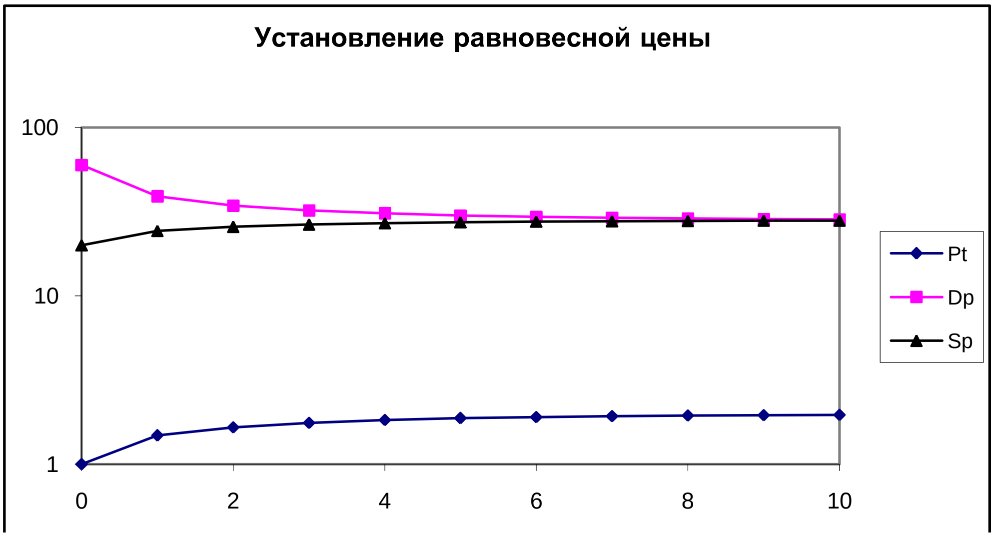


Рис. 9.2

5. В ячейку F5 вводим формулу =C5–D5 (разность спроса и предложения), запускаем ПОИСК РЕШЕНИЯ и устанавливаем параметры

целевая ячейка	F5
цель поиска	значение 0
изменяя ячейки	B5

Ответ: $p_{равн.}$= 1,9870 , $D_{равн.}$= $S_{равн.}$=28,1923.

Задача 2. Найти равновесную цену и время, за которое она установится для следующих данных: *P0*=6, *A*=60, *alfa*=1, *B*=30, *beta*=0,4, *K*=0,02 (учитывать 2 десятичных знака после запятой).

Ответ: равновесная цена равна 1,64 и достигается на 14-м шаге. Равновесные спрос и предложение равны 36,57.

Найти равновесные значения с точностью до 4-х знаков после запятой.

Ответ: $p_{равн.}$= 1,6407 , $D_{равн.}$= $S_{равн.}$=36,5704.

Задача 3. Решить задачу 2 при измененном значении стартового значения цены *P0*=0,4, *A*=60, *alfa*=1, *B*=30, *beta*=0,4, *K*=0,02.

Ответ: равновесная цена достигается на 12-м шаге.

9.2. Обобщенное уравнение динамики

Обобщенное уравнение динамики цены имеет вид

$$p_{t+1} = p_t + знак(D_t - S_t) \cdot K \cdot f(|D_t - S_t|),$$

где функция *f* зависит от модуля разности спроса и предложения, монотонно возрастает и равна нулю в нуле ($f(0) = 0$).

Функция ЗНАК(*x*) задается соотношением

$$ЗНАК(x) = \begin{cases} 1 & при \quad x > 0 \\ 0 & при \quad x = 0 \\ -1 & при \quad x < 0 \end{cases}.$$

Задача 4. Промоделировать процессы p_t, D_t , S_t для степенных функций $D(p)=\dfrac{A}{p^{\alpha}}$, $S(p)=B\cdot p^{\beta}$ с параметрами A=80, *alfa*=1,2, B=20, *beta*=0,6. Уравнение динамики $p_{t+1} = p_t + ЗНАК(D_t - S_t)\cdot K\cdot|D_t - S_t|^{\gamma}$ с параметрами K=0,02, γ=0,3, *P0*=1.
На каком шаге разность между спросом и предложением по модулю будет меньше 0,2?
Ответ: на 27-м, при этом p_{27}= 2,16 , D_{27}= 31,67 , S_{27}=31,79.
Найти равновесные значения с точностью до 4-х знаков после запятой.
Ответ: $p_{равн.}$= 2,1601 , $D_{равн.}$= $S_{равн.}$=31,7480.

§ 10. Паутинообразная динамическая модель установления равновесной цены

10.1. Модель с линейными функциями

Пусть спрос на некоторый товар при цене p определяется функцией

$$D(p)=a-b\cdot p,$$

а предложение этого же товара при цене p задается функцией

$$S(p)= -c+d\cdot p,$$

где a, b, c, d – некоторые константы.
Рассмотрим пошаговую дискретную модель взаимодействия потребителей и производителей. Основное предположение модели состоит в следующем: весь произведенный на любом шаге товар полностью покупается на следующем шаге по цене, устраивающей потребителей и, возможно, отличающейся от той, на которую ориентировался производитель.

Стартовый шаг.

Задается произвольно стартовая цена p_0. Производитель, ориентируясь на эту цену, производит S_0 единиц товара для продажи на следующем шаге, причем согласно функции предложения $S_0 = -c + d\cdot p_0$.

Первый шаг.

Количество товара S_0, созданное на стартовом шаге, будет полностью продано на первом шаге по некоторой цене p_1, которая устраивает покупателей согласно функции спроса. Таким образом, справедливо равенство
$S_0 = D_1 = a - b\cdot p_1$, откуда цена, устраивающая покупателя, равна
$p_1 = (a - S_0)/b$.

Производитель, ориентируясь на новую цену p_1, производит очередную порцию товара $S_1 = -c + d\cdot p_1$ для продажи на следующем шаге. Первый шаг закончен.

Второй и последующие шаги повторяют первый и определяют текущее значение цены и значение предложения на следующем шаге
$p_i = (a - S_{i-1})/b$, $S_i = -c + d\cdot p_i$ ($D_i = a - b\cdot p_i$), где i – номер шага.

Если процесс сходится, то цена стремится к равновесной p_* , которая находится из условия равенства спроса и предложения $a - b{\cdot}p = -c + d{\cdot}p$, откуда

$$p_* = \frac{a+c}{b+d}.$$

Задача 1. Промоделировать динамику изменения цены p_t (t = 0, 1, 2, … , 9) для следующих значений констант: a = 42, b = 2,5, c = 18, d = 2 при стартовом значении цены p_0=10. Построить траекторию $D_0, S_0, D_1, S_1, D_2, S_2, ...$ Найти значения p_9, S_9, D_9.

Решение.

Присвоим ячейкам G2, G3, G4 и G5 соответственно имена *a*, *b*, *c_*, *d* и введем в них значения параметров модели (рис. 10.1)

	A	B	C	D	E	F	G
1	Шаг	Цена (P)	Предложение (SS)	Спрос (DD)	Динамика		
2	0	10		= *a* – *b**B2	=D2	a	42
3	0	10	= –*c_*+ *d**B3		=C2	b	3
4	1	=(*a* – C3)/*b*			=D3	c_	18
5	1	=(*a* – C3)/*b*			=C4	d	2
6							

Рис. 10.1

Для каждого шага будем заполнять по две строки формул: одна строка для вычисления спроса, другая для вычисления предложения.

2. Вводим в B2 и B3 стартовое значение цены 10.
3. Вводим в D2 формулу для расчета стартового (фиктивного) значения спроса D_0.
4. Вводим в C3 формулу для стартового значения предложения S_0.
5. Вводим в B4 и B5 формулу для расчета цены на 1-м шаге.
6. Маркируем сразу обе ячейки B4:B5 и протягиваем левой кнопкой маркер заполнения вниз.
7. Копируем формулы из C3 и D2 вниз.
8. Маркируем сразу обе ячейки E2:E3 и протягиваем левой кнопкой маркер заполнения вниз (копирование сразу двух формул); столбец E теперь содержит последовательность объемов спроса и предложения по шагам $D_0, S_0, D_1, S_1, D_2, S_2, ...$
9. Маркируем диапазон B1:E21 и строим диаграмму типа ТОЧЕЧНАЯ, подтип ЛОМАНАЯ БЕЗ МАРКЕРОВ (рис. 10.2).

Ответ: в ячейке A21 значение цены P_9=12,052. Теоретическое значение равновесной цены равно $p_* = \frac{42+18}{3+2} = 12$, S_9 = 6,10, D_9=5,84.

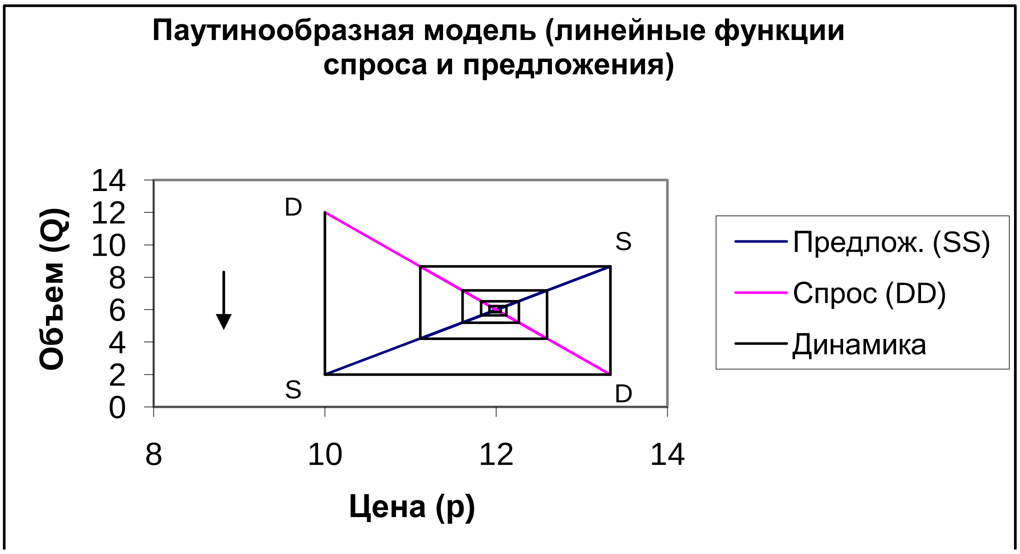


Рис. 10.2

Задача 2. Решить предыдущую задачу при стартовом значении $p_0 = 14$ и тех же значениях параметров *a, b, c, d*.

Задача 3. Решить предыдущую задачу при $p_0 = 10$, $a = 42$, $b = 2{,}5$, $c = 18$, $d = 3$. Отличие состоит в том, что прямая предложения имеет более крутой наклон (3 единицы) по сравнению с наклоном прямой спроса (2,5 единицы).

10.2. Модель со степенными функциями

Пусть спрос и предложение задаются степенными функциями

$$D(p) = \frac{A}{p^{\alpha}} = \frac{20}{p^{0,5}},$$

$$S(p) = B \cdot p^{\beta} = 5 \cdot p^{0,3}.$$

Задача 4. Построить на одной диаграмме графики спроса и предложения на отрезке [1; 40] с шагом $\Delta p = 1$.

Для стартовой цены p_0 = 30 найти процессы p_t, D_t, S_t (t = 0, 1, 2, …, 9). Вывести на диаграмму спроса и предложения траекторию процесса изменения цены и объемов D_0, S_0, D_1, S_2,…

С помощью ПОИСКА РЕШЕНИЯ найти равновесные значения процессов с точностью до 4-х знаков после запятой.

Решение.

Из основного предположения модели имеем $S_0 = D_1 = \frac{A}{p_1^{\alpha}}$, откуда находим формулу для вычисления цены на очередном шаге $p_1 = \left(\frac{A}{S_0}\right)^{1/\alpha}$.

1. Заполняем таблицу аналогично предыдущему примеру (рис. 10.3).

	A	B	C	D	E	F	G
1	Шаг	Цена (P)	Предложение (SS)	Спрос (DD)	Дина-мика		
2	0	10		=*A*/B2^*alfa*	=D2	A	20
3	0	10	=*B**B3^*beta*		=C2	alfa	0,5
4	1	=(*A*/C3)^(1/*alfa*)			=D3	B	5
5	1	=(*A*/C3)^(1/*alfa*)			=C4	beta	0,3
6							

Рис. 10.3

2. Напоминаем, что формулы из пар ячеек B4:B5 и E2:E3 копируются сразу парами (маркировать обе ячейки и протягивать маркер заполнения вниз).
3. Для построения диаграммы спроса и предложения протабулируем соответствующие функции на отрезке [1; 10] с шагом Δp=1. Заполняем диапазон H1:J41, как показано на рис. 10.4.

	H	I	J
1	Цена (p)	Предложение (SS)	Спрос (DD)
2	1	=*B**H2^*beta*	=*A*/H2^*alfa*
3	2		

Рис. 10.4

4. Маркируем диапазон H1:J41 и строим диаграмму типа ТОЧЕЧНАЯ (рис. 10.5)

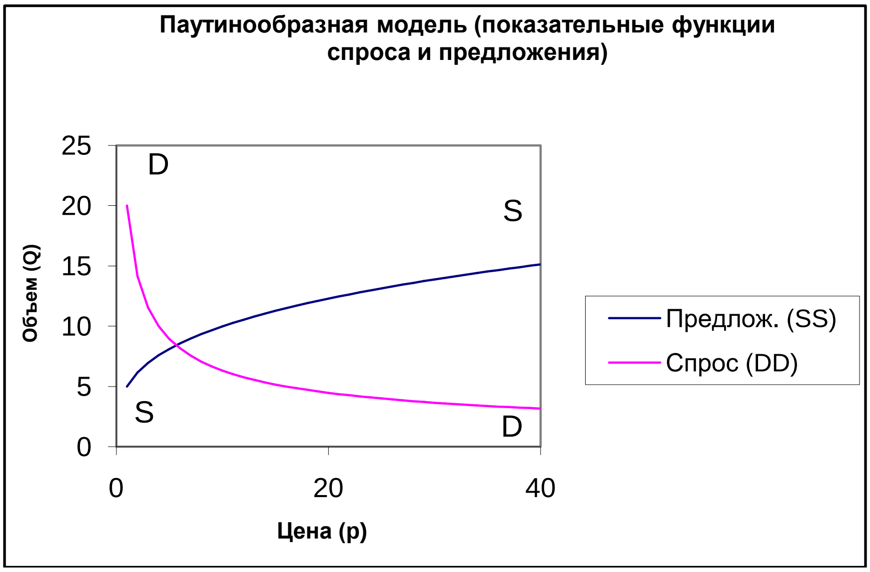


Рис. 10.5

Для выведения траектории изменения цены и объемов выполняем следующие действия:

5. Маркируем диапазон B1:B21 и при нажатой клавише CTRL маркируем диапазон E1:E21 (маркировка неприлегающих диапазонов). Выбираем ПРАВКА, КОПИРОВАТЬ (копирование в буфер).

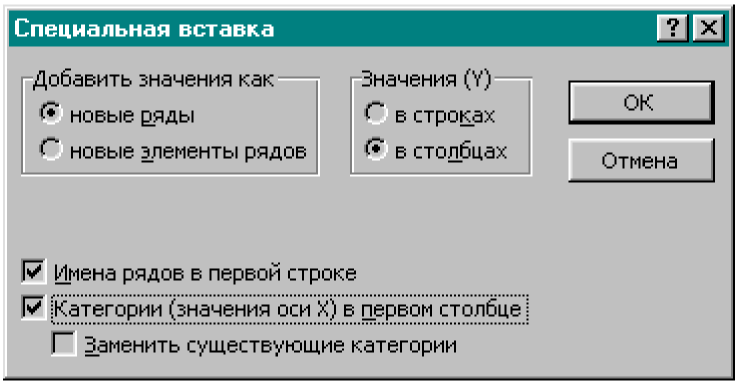


Рис. 10.6

6. Щелкаем по диаграмме спроса и предложения (на границах поля диаграммы появляются 8 черных маркеров).
7. Выбираем из основного меню ВСТАВКА, СПЕЦИАЛЬНАЯ ВСТАВКА.
8. В окне СПЕЦИАЛЬНАЯ ВСТАВКА (рис. 10.6) устанавливаем параметры:

добавить значения как	НОВЫЕ РЯДЫ
значения (Y)	В СТОЛБЦАХ
категории (значения X)	В ПЕРВОМ СТОЛБЦЕ.

9. Щелкаем по кнопке ОК. На диаграмме спроса и предложения появилась паутинообразная траектория изменения цены и объемов (рис. 10.7).

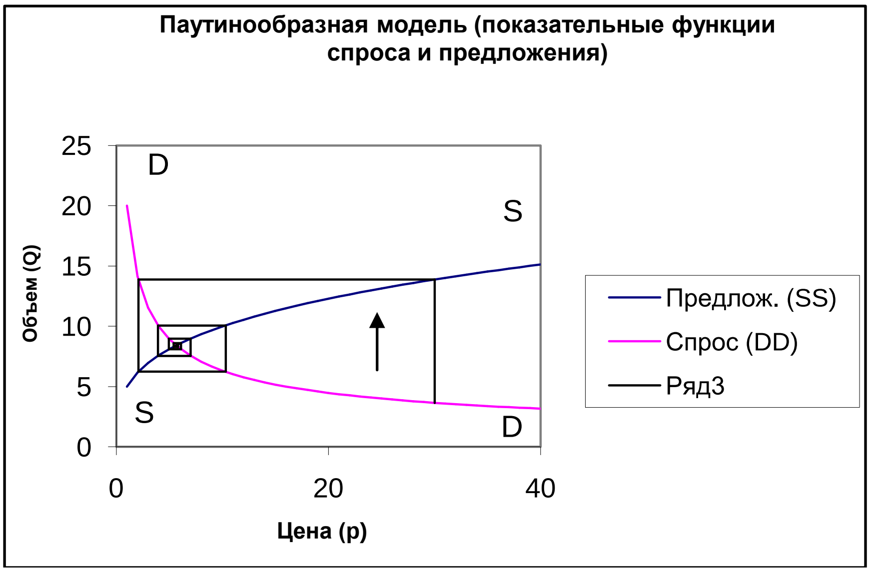


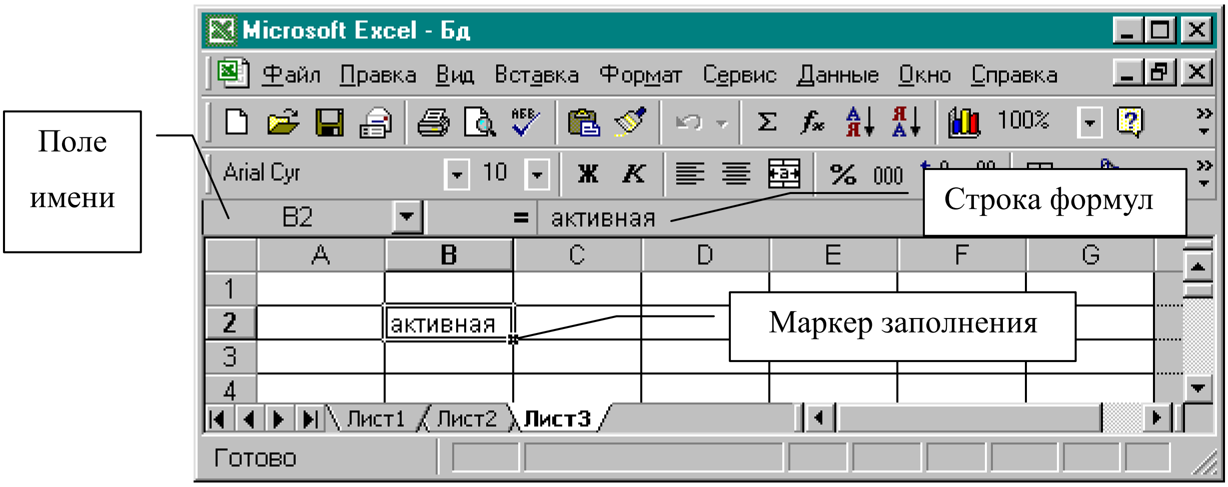
Рис. 10.7

Ответ: p_9= 5,62, S_9=8,39, D_9=8,43. Точные равновесные значения $p_{равн}$=5,6569, $D_{равн}$=$S_{равн}$=8,4090.

Приложение 1. Справка по EXCEL

Окно EXCEL

Окно Excel в целом повторяет структуру окон среды Windows и текстового процессора Word, в частности. Важнейшие особенности окна Excel – это наличие заголовков строк и столбцов, ячеек, строки формул, поля имени (адреса) активной ячейки, ярлыков с именами листов.



Активная ячейка, то есть ячейка, с которой мы в данный момент работаем, выделяется на листе утолщенной границей. Excel отображает ссылку на активную ячейку в поле имени. В правом нижнем углу активной ячейки расположен маленький квадратик – **маркер заполнения**.

Типы ссылок

A1 – относительная ссылка

$A$1 – абсолютная ссылка (используется знак доллара)

$A1 – смешанная ссылка (абсолютное обращение к столбцу)

A$1 – смешанная ссылка (абсолютное обращение к строке)

ЛИСТ2!A1 – ссылка на ячейку из другого (неактивного) листа (после имени листа восклицательный знак);

Работа с листами

В одной книге могут находиться листы нескольких типов, важнейшими из которых являются листы с ячейками и листы **диаграмм** (которые строятся по данным из ячеек). Каждый лист имеет ярлык с именами ЛИСТ1, ЛИСТ2 и т.д. Ярлыки расположены над строкой состояния в нижней части экрана. Меню работы с листами является контекстным и вызывается правой кнопкой, когда курсор указывает на один из ярлыков листа. Лист можно добавить, переименовать, изменить его положение среди других листов и, наконец, удалить. При открытии новой книги в ней находится столько листов, сколько установлено в поле ввода ЛИСТОВ В НОВОЙ КНИГЕ (меню СЕРВИС, ПАРАМЕТРЫ, ОБЩИЕ). При желании это количество может быть изменено.

Диапазоны ячеек

Прямоугольный блок ячеек называется диапазоном и определяется адресами верхней левой и нижней правой ячеек, разделенными двоеточием, Например, A1:B3 – диапазон из 6 ячеек (таблица размерности 3 x 2); A1:A3 – диапазон из 3 ячеек (таблица – строка размерности 1 x 3); F2:F6 – диапазон из 5 ячеек (таблица – столбец размерности 5 x 1);

Маркировка диапазона осуществляется протягиванием мыши при нажатой левой клавише, при этом в поле имени ячейки отображается размерность диапазона, например, 13R x 4C (13 строк и 4 столбца). После отпускания кнопки диапазон будет выделен темным цветом, ячейка, с которой было начато выделение, будет белого цвета (признак активной ячейки), а в поле имени останется имя этой активной ячейки.

Для одновременной маркировки неприлегающих диапазонов надо при протягивании мыши удерживать нажатой клавишу CTRL.

Присвоение имен диапазонам и ячейкам

Чтобы диапазону присвоить пользовательское имя, надо:

1. Диапазон замаркировать.
2. Щелкнуть курсором в поле имени.
3. Ввести с клавиатуры какое-нибудь имя, например, ИТОГИ_98 (пробелы в имени диапазона не допускаются).
4. Завершить ввод нажатием клавиши ENTER.

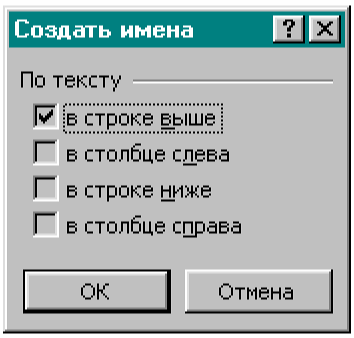
Отдельной ячейке, как частному случаю диапазона, тоже можно присвоить свое имя.

Быстрое присвоение имен нескольким ячейкам

Допустим, рабочим ячейкам A2, B2, C2, D2 надо присвоить имена *a, B2000, c* , *СТАВКА НАЛОГА.*

	A	B	C	D
1	a	B2000	c	СТАВКА налога
2				

Вводим в первую строку над ячейками A2, B2, C2, D2 предполагаемые имена (рис. слева).



Маркируем диапазон A1:D2 (ячейки с предполагаемыми именами и рабочими ячейками) и реализуем цепочку ВСТАВКА, ИМЯ, СОЗДАТЬ.

Ставим галку в поле “в строке выше” и ОК. Ячейкам будут присвоены имена A2 – “*a*”, B2 – “*B2000_*”, C2 – “*c_*”, D2 – “*СТАВКА_налога*”.

По известным причинам Excel не допускает имя “c” и поэтому добавляем к нему знак подчеркивания “_”. Имя “B2000” также не допустимо в качестве пользовательского, так как совпадает с относительным адресом, и поэтому EXCEL добавляет к нему символ подчеркивания. Как уже отмечалось, в именах недопустимы пробелы, поэтому процессор самостоятельно заменил пробел символом подчеркивания в имени “СТАВКА_НАЛОГА”.

Удаление пользовательских имен осуществляется цепочкой меню ВСТАВКА, ИМЯ, ПРИСВОИТЬ. В диалоговом окне ПРИСВОЕНИЕ ИМЕНИ выделяется нужное имя и щелкается по кнопке УДАЛИТЬ.

Вставка имени в формулы

При вводе в формулу пользовательского имени с клавиатуры часто путают русские и латинские буквы, совпадающие по начертанию (а, с и т. д.) Для избежания этой ошибки рекомендуется вводить имена выбором из списка. Список открывается либо клавишей **F3**, либо цепочкой меню ВСТАВКА, ИМЯ, ВСТАВИТЬ.

Типы данных

В ячейки Excel вводятся три типа данных: **числа**, **тексты** и **формулы**. Среди чисел особо выделяются **даты** и **время**. После окончания ввода числа по умолчанию выравниваются по правой границе ячейки, а тексты – по левой (если пользователь не применил иной формат). Это обстоятельство помогает контролировать ввод данных.

Если вы вводите дату, а она после нажатия ENTER выравнивается по левой границе, значит, Excel воспринял данные как текст и, следовательно, при вводе была допущена ошибка.

Если вы вводите число, а оно выравнивается по левой границе, значит, допущена ошибка, например, перепутан разделитель целой и дробной части (в одних установках этим разделителем является точка, в других – запятая).

Формулы начинаются со знака равно « = ». Обычно формула видна как формула только в процессе ввода или редактирования. В остальное время в ячейке отображается результат вычислений по формуле. Для длительного отображения формул в ячейках надо установить флажок ФОРМУЛЫ в группе ПАРАМЕТРЫ ОКНА на вкладке ВИД пункта ПАРАМЕТРЫ меню СЕРВИС.

Выполнение ввода данных

Чтобы поместить данные в определенную ячейку листа, следует выделить нужную ячейку, ввести данные и подтвердить ввод. При вводе данных в ячейку данные отображаются в строке формул. Для отмены текущего ввода используется клавиша ESC. Подтвердить ввод данных можно:

1) нажатием клавиши ENTER; 2) нажатием любой клавиши управления курсором; 3) щелчком на другой ячейке листа.

После подтверждения ввода в ячейку его можно отменить, выбрав команду ПРАВКА, ОТМЕНИТЬ ВВОД.

Ввод чисел

Excel воспринимает содержимое ячейки как число, если оно состоит только из цифр и, может быть, некоторых специальных символов.

Если перед числом или в числе введена одна запятая, то она воспринимается как десятичная запятая: ,02 = 0,02.

Если после числа ввести знак процента (%), программа при вычислениях разделит отображенное в ячейке значение на 100: 20% = 0,2

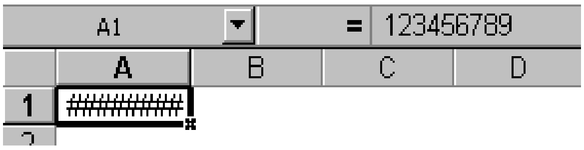
Для ввода дроби между целой и дробной частью надо ввести пробел и использовать в качестве дробной черты символ (/): 1 1/2

Если дробь не располагает целой частью, то в качестве целой части надо ввести цифру (0) 0 3/16, в противном случае дробь будет восприниматься как дата.

Для ввода числа в научном формате вводится буква Е: 1,20Е03 (1,2 умноженное на 10 в 3-й степени) = 1200, 4,15Е–01 (4,15 умноженное на 10 в (–1)-й степени) = 0,415.

Если ширина ячейки недостаточна для отображения введенного числа, EXCEL автоматически покажет его в научном формате.

Если число вместе с присвоенным форматом не помещается в ячейке, EXCEL представит вместо числа символы ###. Чтобы отобразить число, надо увеличить ширину столбца.



Чтобы Excel относился к содержимому ячейки, состоящему только из цифр, как к тексту, надо перед первой цифрой ввести апостроф (’), например, ’125.

Ниже представлено одно и то же число 2,25 в различных форматах.

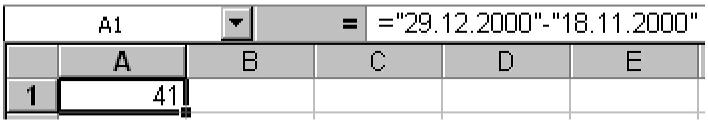
	A	B	C	D	E	F	G
1	2,25	2,3	2,250	225%	2 1/4	2,25E+01	

Как видно из рисунка отображенное значение не всегда точно совпадает с сохраненным в ячейке фактическим значением. В ячейке В1 выводится один десятичный знак (с округлением). В ячейке С1 выводится 3 знака после запятой (с добавлением незначащего нуля). В ячейке F1 число в научном формате (2,25*10^1). Фактическое значение всегда точно отображено в строке формул (см. рис.) Значения даты, процента, времени и в ячейке, и в строке формул представлены одинаково (с учетом формата ячейки).

Ввод даты и времени

Чтобы правильно отобразить дату и время, необходимо ввести их в том формате, в котором Excel распознает значения как дату или время. В этом случае Excel отображает введенные данные в том виде, в каком мы желаем, но хранит их в памяти как числовые выражения, а именно: каждая дата представляет собой количество дней, прошедших с 1 января 1900 года (этой дате присвоено значение 1), а каждое значение времени представляет часть от начала суток (от 0 до 1). Например, дата 02.01.1900 хранится как целое число 2, время 12:00 хранится как дробь 0,5 (половина суток), время 6:00 хранится как дробь 0,25 (четверть суток).

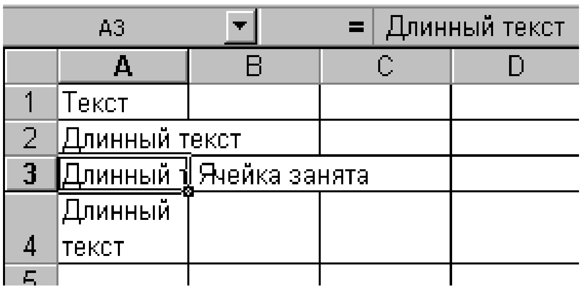
В качестве разделителя отдельных частей даты наряду с точкой можно использовать дефис (-), выполнив соответствующие установки в ПАНЕЛИ УПРАВЛЕНИЯ. Если в ячейке должны быть указаны и значение даты, и значение времени, их надо разделить пробелом 25.04.98 1:30 PM; 25.04.98 13:30



При использовании в формулах значений даты и времени они должны быть указаны в кавычках. На соседнем рисунке в ячейку A1 введена формула для расчета количества дней между двумя датами: =”29.12.2000”–“18.11.2000”

Ввод текста

Любые данные, которые программа не воспринимает в качестве числа (даты, времени) или в качестве формулы, считаются текстом.



По умолчанию текст выровнен по левой границе. Если введенный текст полностью не помещается в пределах одной ячейки, то он будет отображен поверх расположенной справа пустой ячейки (см. ячейку A2). Если же соседняя ячейка не пуста, текст будет обрезан по правой границе своей ячейки (см. ячейку A3). Длинный текст можно разбить на несколько строк, задавая нажатием клавиш ALT+ENTER переход к новой строке (см. ячейку A4).

Ввод серийных данных

Маркер заполнения удобно использовать для ввода последовательностей данных. Если некоторая активная ячейка содержит заголовок, например, Клиент 5, то, перемещая маркер **левой** кнопкой вниз, будем получать ряд: Клиент 6, Клиент 7 и т.д., перемещая вверх – будем получать Клиент 4, Клиент 3 и т.д. Пусть активная ячейка содержит число 1. Перемещая маркер вниз, удерживая клавишу CTRL, получаем 2, 3, 4 … , перемещая вверх, получаем 0, –1, –2 … Перемещение маркера вниз (или вправо) из ячейки, содержащей дату, увеличивает дату на один календарный день.

Протягивание **правой** кнопкой приводит к другим результатам, а именно: если маркер перемещать правой кнопкой мыши, то после отпускания кнопки открывается контекстное меню, предоставляющее следующие возможности: *ввод серийных дат, ввод последовательностей* различных типов с нужными параметрами.

Ввод формул

Формула есть сочетание констант, операторов, ссылок, функций и имен диапазонов. Приведем несколько примеров формул разного состава:

=2^2+(1+3)/2; =B1*C2+F2; =A1*$D$2;

=СУММ(A1:A20). СУММ – встроенная функция;

=D2*НДС+D3*ПодНалог. НДС и ПодНалог – имена ячеек.

Операторы в формулах и их иерархия

Арифметические операторы:

1) +, – Сложение, вычитание; 2)*, / Умножение, деление;

3) ^ Возведение в степень;

Операторы сравнения: Равно {=}; Меньше, больше{<,>}; Меньше или равно {<=}; Больше или равно{>=}; Не равно {< >}.

Если формула содержит несколько операторов, то те будут обработаны в формуле в следующей последовательности:

1) Знак отрицательного числа; 2) ^ Возведение в степень; 3) *, /Умножение, деление; 4)+, –Сложение, вычитание.

Минус имеет самый высокий приоритет, поэтому, например, результатом формулы { = –4^2+1} будет число 17, а не –15 (как принято в математике). Если формулу содержит несколько операторов с одинаковым приоритетом, они будут выполнены слева направо. Для изменения последовательности выполнения операторов используются круглые скобки, выражения в скобках обрабатываются в первую очередь: {=6+4/2} равно 8; {=(6+4)/2} равно 5; {=12/3+1} равно 5; {=12/(3+1)} равно 3.

Некоторые функции EXCEL

ЦЕЛОЕ(x)– отбрасывание дробной части числа *x*; *ОКРУГЛ(x; k)* – округление числа *x* до *k* десятичных знаков после запятой; *EXP(x)*– экспонента e^x; *ASIN(x)*– арксинус числа *x* , *СЕГОДНЯ()*– выдает текущую дату (аргумент отсутствует).

Задание ссылки на одну ячейку методом указания

Для ввода в формулу ссылки методом указания надо: 1) ввести часть формулы вплоть до того места, в котором должна быть ссылка; 2) поместить курсор на ячейку, ссылка на которую должна быть в формуле (в формуле появляется требуемая относительная ссылка, а сама ячейка отмечается бегущей штриховой рамкой).

Изменение типа ссылок

Чтобы изменить тип ссылки, надо нажать клавишу F4. Тип текущей ссылки изменяется при каждам нажатии клавиши F4.

Нажатие F4	Адрес	Ссылка
Один раз	$A$1	Абсолютная ссылка
Два раза	A$1	Абсолютная ссылка на строку
Три раза	$A1	Абсолютная ссылка на столбец
Четыре раза	A1	Относительная ссылка

Тип ссылки можно изменить и в готовой формуле. Для этого надо активизировать нажатием клавиши F2 режим редактирования содержимого ячейки, поместить курсор в нужную ссылку и нажать клавишу F4.

Задание ссылки на диапазон ячеек методом указания

В функциях в качестве аргументов используются ссылки на диапазоны ячеек. Например: =СУММ(А1:А20). Задать ссылку на диапазон можно следующим способом: 1) ввести часть формулы вплоть до того места, в котором должна быть указана ссылка; 2) переместить курсор на первую ячейку диапазона (ячейка будет выделена так же, как при задании ссылки на отдельную ячейку методом указания); 3) ввести двоеточие или нажать клавишу F8 (в строке состояния включится индикатор ВДЛ); 4) переместить указатель на последнюю ячейку нужного диапазона (вокруг диапазона появится бегущая штриховая рамка); 5) закрыть скобки.

Ссылка на диапазон может быть задана путем перемещения указателя мыши при нажатой левой кнопке мыши через ячейки диапазона.

Задание ссылки путем ввода с клавиатуры

Формула может быть полностью задана путем ввода с клавиатуры, включая ссылки на ячейки и диапазоны (а также имена). Этот способ, однако, требует больших затрат и часто приводит к ошибкам (например, когда адреса ячеек вводятся не латинскими буквами).

Ссылки могут быть записаны как прописными, так и строчными буквами. Если ссылка задана правильно, то после подтверждения ввода формулы EXCEL преобразует все буквы в прописные.

Копирование формул протаскиванием и через буфер

Для копирования формулы из ячейки на любое количество ячеек вниз/вверх или влево/вправо надо: 1) замаркировать ячейку-источник с формулой (числом); 2) левой кнопкой зацепить маркер заполнения и протащить его на нужное количество ячеек в нужном направлении.

Для копирования на далекие расстояния используется БУФЕР: 1) после маркировки ячейки реализовать цепочку меню ПРАВКА, КОПИРОВАТЬ; 2) установить курсор в место вставки копии и ПРАВКА, ВСТАВИТЬ.

Копирование относительных и абсолютных ссылок

	A	B	C	D
1	#ССЫЛКА!		=B1+3	
2		=A2+3	=B2+3	=C2+3
3			=B3+3	

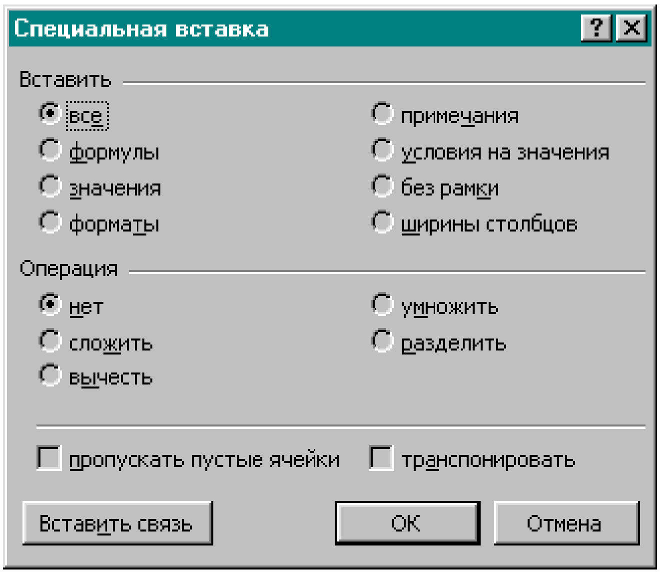
Пусть в ячейке С2 находится формула {=В2+3}. Для С3 ячейка В2 является первым левым соседом, поэтому приведенная формула означает “к первой ячейке слева прибавить число 3”. При копировании в другие ячейки формула примет вид, как показано на рис. слева (для В2 ячейкой слева является А2 , для С1 соответственно В1 и т. д.). У ячейки А1 нет левого соседа, поэтому при копировании в нее формулы из С2 EXCEL выдает сообщение об ошибке (#ССЫЛКА).

	A	B	C	D
1	$B$2+3		=$B$2+3	
2		=$B$2+3	=$B$2+3	=$B$2+3
3			=$B$2+3	

При копировании формул абсолютные ссылки не меняются. На рис. слева формула из С2 скопирована в соседние.

При копировании смешанных ссылок не меняются соответственно либо номера строк (B$1), либо имена столбцов ($B1).

Копирование значений (результатов формул)



При обычном копировнии копируется формула (но не результат) и формат ячейки. Однако можно скопировать или только формулу, или только значение формулы, или только формат. Это можно сделать через буфер последовательностью ПРАВКА, КОПИРОВАТЬ и далее ПРАВКА, СПЕЦИАЛЬНАЯ ВСТАВКА (рис. слева)

На следующем рисунке из ячейки B1 в D1 скопирована только формула, в D2 скопировано значение, в D3 – только формат (рамка). В ячейку B3 произведено обычное копирование.

	A	B	C	D
1	5	=A1+A2		=C1+C2
2	3			8
3	7	=A3+A4		

Копирование нескольких ячеек протаскиванием

Для быстрого копирования формул из диапазона B1:B3 вправо (см. рис.) надо: 1) замаркировать диапазон B1:B3; 2) протащить левой кнопкой маркер заполнения вправо (результат в диапазоне C1:C3).

При копировании этого же диапазона вниз сохраняется порядок формул (см. диапазон B4:B6).

	A	B	C	D
1	5	=A1+3	=B1+3	
2	3	=A2^5	=B2^5	
3	7	=A3*17	=B3*17	
4		=A4+3		
5		=A5^5		
6		=A6*17		

Быстрое копирование формул при табулировании функций

Заполняем столбец аргументов X. В первую ячейку столбца значений функции F(X) вводим формулу, имеющую ссылку на правый столбец.

Маркируем ячейку с формулой и делаем **двойной щелчок** по маркеру заполнения. Формула копируется вниз до последней строки, содержащей значение аргумента.

	A	B
1	x	f(x)
2	0	=SIN(A2)
3	0,1	
4	0,2	
5	0,3	