Математическое ожидание дискретной случайной величины.

Пусть задан закон распределения случайной величины ξ.

ξ	x_1	x_2	x_3	…	x_n
P	p_1	p_2	p_3	…	p_n

Математическое ожидание $M\xi$ (или $M(\xi)$) случайной величины ξ определяется формулой

$$M\xi = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$$

Рассмотрим пример. Пусть в некотором магазине, торгующем электробытовой техникой, получены статистические данные о числе проданных холодильников в каждый день месяца (условно считаем, что месяц состоит из 30 рабочих дней). Эти данные собраны в таблицу:

Количество проданных холодильников	0	1	2	3	4	5
Число дней, в которые было продано столько холодильников	3	7	8	9	2	1

По этой таблице легко подсчитать число холодильников, проданных в магазине за месяц: $0{\cdot}3+1{\cdot}7+2{\cdot}8+3{\cdot}9+4{\cdot}2+5{\cdot}1 = 63$. Чтобы подсчитать среднее число холодильников, продававшихся в один день месяца, нужно эту сумму разделить на 30, в результате получим 2,1. Если в приведенной таблице каждое число второй строки поделить на 30, то получится последовательность дробей $\frac{1}{10}; \frac{7}{30}; \frac{4}{15}; \frac{3}{10}; \frac{1}{15}; \frac{1}{30}$, каждая из которых представляет собой так называемую **относительную частоту**, с которой в данный месяц появлялся приведенный в верхней строке объём продаж. Очевидно, что если просуммировать все произведения чисел, стоящих в первой строке таблицы, на их относительные частоты, то получится то же среднее число продававшихся в один день холодильников:

$$0 \cdot \frac{1}{10} + 1 \cdot \frac{7}{30} + 2 \cdot \frac{4}{15} + 3 \cdot \frac{3}{10} + 4 \cdot \frac{1}{15} + 5 \cdot \frac{1}{30} = 2{,}1$$

Если бы в последней формуле относительные частоты рассчитывались не для одного месяца, а для существенно большего срока, то при некоторых условиях (например, при отсутствии кризисных явлений, существенно влияющих на спрос населения на дорогостоящие товары) эти относительные частоты можно было бы считать довольно близкими к вероятностям соответствующих значений объёма продаж. Таким образом, приходим к выводу, что математическое ожидание случайной величины – это в некотором смысле её среднее значение. Следует отметить, что случайная величина может вообще не принимать значения, равного её математическому ожиданию. Так, например, случайная величина, принимающая только значения 1 и –1, каждое – с вероятностью 0,5, имеет математическое ожидание, равное нулю.

Пример. Найти математическое ожидание случайной величины, заданной законом распределения

ξ	1	0
P	p	q

Здесь p + q = 1,

$$M\xi = 1\cdot p + 0\cdot q = p$$

Свойства математического ожидания.

1. Если случайная величина ξ принимает одно и то же значение при всех исходах случайного эксперимента, то есть $\xi \equiv C$, то её математическое ожидание равно C.
2. Если $M\xi = a$, и k – константа, то $M(k\xi) = ka$ (математическое ожидание случайной величины, умноженной на число, равно математическому ожиданию случайной величины, умноженному на это число).
3. Если $M\xi = a$, и k – константа, то $M(k + \xi) = k + a$ (математическое ожидание суммы случайной величины и числа равно сумме этого числа и математического ожидания случайной величины).

Выведем формулу для математического ожидания суммы двух случайных величин ξ и η, определённых на одном и том же пространстве элементарных исходов и заданных законами распределения

ξ	x_1	…	x_n
P	p_1^1	…	p_n^1

η	y_1	…	y_k
P	p_1^2	…	p_k^2

$M(\xi + \eta) = (x_1 + y_1)P((\xi = x_1) \cap (\eta = y_1)) + (x_2 + y_1)P((\xi = x_2) \cap (\eta = y_1)) + \ldots$
$+(x_i + y_j)P((\xi = x_i) \cap (\eta = y_j)) + \ldots + (x_n + y_k)P((\xi = x_n) \cap (\eta = y_k))$

Очевидно, что сумма в правой части последней формулы содержит nk слагаемых. Преобразуем эту сумму следующим образом:

$$M(\xi + \eta) = x_1 P((\xi=x_1)\cap(\eta=y_1)) + x_1 P((\xi=x_1)\cap(\eta=y_2)) + \ldots + x_1 P((\xi=x_1)\cap(\eta=y_k)) +$$
$$+ x_2P((\xi=x_2)\cap(\eta=y_1)) + x_2P((\xi=x_2)\cap(\eta=y_2)) + \ldots + x_2P((\xi=x_2)\cap(\eta=y_k)) + \ldots$$
$$+ x_nP((\xi=x_n)\cap(\eta=y_1)) + x_nP((\xi=x_n)\cap(\eta=y_2)) + \ldots + x_nP((\xi=x_n)\cap(\eta=y_k)) +$$
$$+ y_1P((\xi=x_1)\cap(\eta=y_1)) + y_1P((\xi=x_2)\cap(\eta=y_1)) + \ldots + y_1P((\xi=x_n)\cap(\eta=y_1)) +$$
$$+ y_2P((\xi=x_1)\cap(\eta=y_2)) + y_2P((\xi=x_2)\cap(\eta=y_2)) + \ldots + y_2P((\xi=x_n)\cap(\eta=y_2)) + \ldots$$
$$+ y_kP((\xi=x_1)\cap(\eta=y_k)) + y_kP((\xi=x_2)\cap(\eta=y_k)) + \ldots + y_kP((\xi=x_n)\cap(\eta=y_k)) =$$
$$= x_1(P((\xi=x_1)\cap(\eta=y_1)) + P((\xi=x_1)\cap(\eta=y_2)) + \ldots + P((\xi=x_1)\cap(\eta=y_k))) +$$
$$+ x_2(P((\xi=x_2)\cap(\eta=y_1)) + P((\xi=x_2)\cap(\eta=y_2)) + \ldots + P((\xi=x_2)\cap(\eta=y_k))) + \ldots +$$
$$+ x_n(P((\xi=x_n)\cap(\eta=y_1)) + P((\xi=x_n)\cap(\eta=y_2)) + \ldots + P((\xi=x_n)\cap(\eta=y_k))) +$$
$$+ y_1(P((\xi=x_1)\cap(\eta=y_1)) + P((\xi=x_2)\cap(\eta=y_1)) + \ldots + P((\xi=x_n)\cap(\eta=y_1))) +$$
$$+ y_2(P((\xi=x_1)\cap(\eta=y_2)) + P((\xi=x_2)\cap(\eta=y_2)) + \ldots + P((\xi=x_n)\cap(\eta=y_2))) + \ldots$$

$+ y_k(P((\xi=x_1)\cap(\eta=y_k)) + P((\xi=x_2)\cap(\eta=y_k)) +\ldots + P((\xi=x_n)\cap(\eta=y_k))) =$

$= x_1P(\xi=x_1) + x_2P(\xi=x_2) +\ldots+ x_n P(\xi=x_n) +$

$+ y_1P(\eta=y_1) + y_2P(\eta=y_2) +\ldots+ y_1P(\eta=y_1) = M\xi + M\eta$

При выводе этой формулы использован очевидный факт, что, например, событие $\xi=x_1$ можно представить в виде объединения несовместных событий $(\xi=x_1)\cap(\eta=y_1)$, $(\xi=x_1)\cap(\eta=y_2)$, …, $(\xi=x_1)\cap(\eta=y_n)$.

Пример.

Заданы n одинаково распределённых случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ с законом распределения

Таблица 1

ξ_i	1	0
P	p	q

Найти математическое ожидание суммы этих случайных величин.

Решение.

$$M(\sum_{i=1}^{n}\xi_i) = \sum_{i=1}^{n}M\xi_i = np$$

Если случайные величины ξ и η независимы, то

$$M(\xi\eta) = M\xi\cdot M\eta$$

Доказательство.

Если заданы законы распределения двух **независимых** случайных величин ξ и η

ξ	x_1	…	x_i	…	x_n
P	p_1^1	…	p_i^1	…	p_n^1

η	y_1	…	y_j	…	y_k
P	p_1^2	…	p_j^2	…	p_k^2

то математическое ожидание произведения этих случайных величин можно представить следующим образом:

$$M(\xi\eta) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}x_i y_j p_i^1 p_j^2 =$$

$$= x_1 p_1^1 \sum_{j=1}^{k} y_j p_j^2 + x_2 p_2^1 \sum_{j=1}^{k} y_j p_j^2 +\ldots+ x_i p_i^1 \sum_{j=1}^{k} y_j p_j^2 \ldots+ x_n p_n^1 \sum_{j=1}^{k} y_j p_j^2 =$$

$$= x_1 p_1^1 M\eta + x_2 p_2^1 M\eta + \ldots+ x_i p_i^1 M\eta\ldots+ x_n p_n^1 M\eta = M\eta\sum_{i=1}^{n}x_i p_i = M\xi\cdot M\eta$$

Дисперсия случайной величины.

Дисперсия $D\xi$ случайной величины ξ определяется формулой

$$D\xi = M(\xi - M\xi)^2.$$

Дисперсия случайной величины — это математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от её математического ожидания.

Рассмотрим случайную величину ξ с законом распределения

ξ	1	2	3

P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$

Вычислим её математическое ожидание.

$$M\xi = 1\cdot\frac{1}{6} + 2\cdot\frac{1}{2} + 3\cdot\frac{1}{3} = \frac{13}{6}$$

Составим закон распределения случайной величины $\xi - M\xi$

$\xi - M\xi$	$-\frac{7}{6}$	$-\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6}$
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$

а затем закон распределения случайной величины $(\xi - M\xi)^2$

$(\xi - M\xi)^2$	$\frac{1}{36}$	$\frac{25}{36}$	$\frac{49}{36}$
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

Теперь можно рассчитать величину $D\xi$:

$$D\xi = \frac{1}{36}\cdot\frac{1}{2} + \frac{25}{36}\cdot\frac{1}{3} + \frac{49}{36}\cdot\frac{1}{6} = \frac{17}{36}$$

Формулу вычисления дисперсии дискретной случайной величины можно представить в таком виде:

$$D\xi = \sum_{i=1}^{n}(x_i - M\xi)^2 p_i$$

Можно вывести ещё одну формулу для вычисления дисперсии:

$$D\xi = \sum_{i=1}^{n}(x_i - M\xi)^2 p_i = \sum_{i=1}^{n}\left(x_i^2 - 2x_i M\xi + M^2\xi\right)p_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}x_i^2 p_i - 2M\xi\sum_{i=1}^{n}x_i p_i + M^2\xi\sum_{i=1}^{n}p_i = M\xi^2 - 2M\xi\cdot M\xi + M^2\xi =$$

$$= M\xi^2 - M^2\xi$$

Таким образом, дисперсия случайной величины равна разности математического ожидания квадрата случайной величины и квадрата её математического ожидания.

Пример.

Найти дисперсию случайной величины, с законом распределения, заданным таблицей 1.Выше было показано, что $M\xi = p$. Легко видеть, что $M\xi^2 = p$. Таким образом, получается, что $D\xi = p - p^2 = pq$.

Дисперсия характеризует степень рассеяния значений случайной величины относительно её математического ожидания. Если все значения случайной величины тесно сконцентрированы около её математического ожидания и большие отклонения от математического ожидания маловероятны, то такая случайная величина имеет малую дисперсию. Если значения случайной величины рассеяны и велика вероятность больших отклонений от математического ожидания, то такая случайная величина имеет большую дисперсию.

Дисперсия случайной величины равна нулю в том и только в том случае, когда эта случайная величина – константа (то есть при всех исходах случайного эксперимента принимает одно и то же значение).

Свойства дисперсии.

1. Если c – число, то $D(\xi + c) = D(\xi)$
2. Если k – число, то $D(k\xi) = k^2 D\xi$.

Доказательство.

$$D(k\xi) = M(k\xi - M(k\xi))^2 = M(k\xi - k\,M\xi)^2 = M(k^2\,(\xi - M\xi)^2) = k^2M(\xi - M\xi)^2 = \\ = k^2\,D\xi$$

3. Для попарно независимых случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ справедливо равенство

$$D\sum_{i=1}^{n}\xi_i = \sum_{i=1}^{n}D\xi_i$$

Это свойство оставим без доказательства. Из этого свойства, в частности, следует, что дисперсия суммы n независимых случайных величин ξ_i с законом распределения, заданным таблицей 1, равна npq. Теперь можно сделать важный вывод. Пусть проводится n повторных независимых испытаний, в каждом из которых событие A происходит с вероятностью p. Число k появлений события A можно рассматривать как случайную величину. Обозначим эту случайную величину ξ. Как уже говорилось ранее, эта случайная величина называется бернуллиевской случайной величиной. Несложно понять, что имеет место равенство: $\xi = \sum_{i=1}^{n}\xi_i$. Отсюда следует, что математическое ожидание бернуллиевской случайной величины равно np, а её дисперсия равна $np(1 - p)$.

Если случайные величины ξ_i и ξ_j зависимы, то дисперсия суммы этих случайных величин не равна сумме их дисперсий. Этот случай разобран в последующих лекциях.

Рекомендуем читателю рассмотреть следующий пример.

Пусть ξ и η – независимые случайные величины с заданными законами распределения:

ξ	0	1
P	0,25	0,75

η	1	2
P	0,7	0,3

Показать, что $D(\xi + \eta) = D\xi + D\eta$.

Величина $\sqrt{D\xi}$ называется среднеквадратическим отклонением случайной величины. Как видно, среднеквадратическое отклонение имеет ту же размерность, что и сама случайная величина.

Задача I. Собрана колода из четырёх карт – туза, короля, дамы и валета, расположенных в произвольном порядке. Случайная величина ξ – число карт между тузом и королём. Найти величины $M\xi$ и $D\xi$.

Задача II.

В урне 2 белых, 2 чёрных и 1 зелёный шар. Из урны наудачу извлекаются 3 шара. Случайная величина ξ – число белых шаров в выборке. Случайная величина η принимает значение 0, если в выборке есть зелёный шар, и принимает значение 1, если в выборке нет зелёного шара. Найти величины $M\xi$ и $D\xi$. Проверить выполнение равенства $M(\xi + \eta) = M\xi + M\eta$ и неравенств $D(\xi + \eta) \neq D\xi + D\eta$, $M\xi\eta \neq M\xi M\eta$

Задача III.

По прогнозу акции корпорации C_1 поднимутся в цене с вероятностью 0,7. Независимо от них акции корпорации C_2 поднимутся в цене с вероятностью 0,5. Случайная величина ξ примет значение 0, если ни одна из акций C_1 и C_2 не поднимется в цене, значение 1, если только одна из этих акций поднимется в цене, и значение 2, если в цене поднимутся обе акции. Случайная величина η примет значение 0, если акция C_1 не поднимется в цене и значение 1, если эта акция поднимется в цене. Найти величины $M\xi$ и $D\xi$. Проверить справедливость неравенства $D(\xi + \eta) \neq D\xi + D\eta$.

Задача IV. Собрана колода из четырёх карт – туза, короля, дамы и валета, расположенных в произвольном порядке. Случайная величина ξ – число карт между тузом и королём. Случайная величина η принимает значение 0, если туз оказался перед королём, и значение 1, если туз лежит после короля. Найти величины $M\xi$ и $D\xi$. Проверить справедливость равенств $D(\xi + \eta) = D\xi + D\eta$, $M\xi\eta = M\xi M\eta$

Ответы. **I** 2/3, 5/9; **II** 1,2, 0,36, законы распределения случайных величин $\xi + \eta$ и $\xi\eta$ имеют вид

$\xi + \eta$	0	1	2	3
P	0,1	0,4	0,3	0,2

$\xi\eta$	0	1	2
P	0,6	0,2	0,2

III 1,2, 0,46; **IV** 2/3, 5,9