Дискретные случайные величины.

Часто результатом случайного эксперимента является число. Например, можно подбросить игральную кость и получить одно из чисел: 1,2,3,4,5,6. Можно подъехать к бензоколонке и обнаружить определённое число автомашин в очереди. Можно выстрелить из пушки и измерить расстояние от места выстрела до места падения снаряда. В таких случаях будем говорить, что имеем дело со случайной величиной.

Каждому исходу случайного эксперимента поставим в соответствие единственное число x_k — значение случайной величины. Тогда **естественно рассматривать случайную величину как функцию, заданную на множестве исходов случайного эксперимента.**

Случайная величина, которая может принимать лишь конечное или счётное число значений, называется **дискретной**.

Случайные величины будем обозначать буквами греческого алфавита: ξ (кси), η (эта), … Значения случайной величины будем записывать в виде конечной или бесконечной последовательности $x_1, x_2,\dots, x_n,\dots$

Если говорится, что задана случайная величина ξ, это значит, что каждому исходу ω_k случайного эксперимента поставлено в соответствие единственное число x_k, что записывается в виде равенства $x_k = \xi(\omega_k)$.

Некоторые из значений x_k могут совпадать, то есть различным исходам ω может соответствовать одно и то же число x. Если все значения случайной величины совпадают, то будем говорить, что случайная величина постоянна.

Пусть A_k — множество всех элементарных исходов, каждому из которых соответствует значение x_k ($k = 1,2,\dots,n$) случайной величины ξ. Этот факт можно записать в виде формулы

$$A_k = \bigcup_{i:\xi(\omega_i)=x_k} \omega_i$$

Таким образом, A_k – это событие (строго говоря, это верно лишь в случае конечного или счётного числа исходов). Для каждого события A_k определим число $p_k \ge 0$, равное вероятности этого события: $p_k = P(A_k)$. Очевидно, что

$$\bigcup_{k=1}^{n} A_k = \Omega,\ A_i \cap A_j = \varnothing \quad (i,j = 1,2,\dots,n,\ i\neq j),\quad \sum_{i=1}^{n} p_k = 1.$$

Теперь каждому значению x_k случайной величины ξ можно поставить в соответствие вероятность $p_k = P(A_k)$ события A_k. Если такое соответствие определено то будем говорить, что задан **закон распределения** дискретной случайной величины ξ. Обычно закон распределения дискретной случайной величины представляется в виде таблицы

ξ	x_1	x_2	x_3	…	x_n
P	p_1	p_2	p_3	…	p_n

(1)

В дальнейшем для краткости будем называть величину p_i вероятностью значения x_i случайной величины. Отметим, что закон распределения содержит всю информацию о случайной величине, и задать случайную величину можно, просто представив её закон распределения.

Задача.

Стрелок стреляет в мишень два раза. Известно, что он попадает в мишень с первого выстрела с вероятностью 0,1. Если первый выстрел удачный, то при втором выстреле он попадает в мишень с вероятностью 0,7, если же первый выстрел неудачный, то при втором выстреле он попадает в мишень с вероятностью 0,5.

Написать закон распределения случайной величины ξ – числа попаданий в мишень.

Решение.

Очевидно, случайная величина может принимать значения 0, 1, 2. Значение 0 случайная величина может принимать при наступлении следующего события: стрелок не попадает в мишень с первого выстрела (событие A) и не попадает в мишень со второго выстрела (событие B). По формуле умножения вероятностей

$$P(A \cap B) = P(A)P(B/A)$$

В нашем случае $P(A \cap B) = 0{,}9 \cdot 0{,}5 = 0{,}45$.

Значение 1 случайная величина может принимать в двух случаях: первый выстрел – промах (событие C), второй выстрел – попадание (событие D) или первый выстрел – попадание (событие E), второй выстрел – промах(событие F).

$$P(C \cap D) = 0{,}9 \cdot 0{,}5 = 0{,}45; \; P(E \cap F) = 0{,}1 \cdot 0{,}3 = 0{,}03$$

Таким образом, вероятность, с которой случайная величина принимает значение 1 равна 0,48.

Значение 2 случайная величина принимает с вероятностью, равной $0{,}1 \cdot 0{,}7 = 0{,}07$. Искомый закон распределения случайной величины имеет вид

ξ	0	1	2
P	0,45	0,48	0,07

Зависимость и независимость двух случайных величин.

Пусть две случайные величины

$$\xi = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}; \;\; \eta = \{y_1, y_2, \ldots, y_m\} \qquad (2)$$

определены на одном и том же пространстве элементарных исходов. Если A_i ($i = 1,2,\ldots,n$) – событие, объединяющее все исходы, приводящие к значению x_i случайной величины ξ, а B_j ($j = 1,2,\ldots,m$) – событие, объединяющее все исходы, приводящие к значению y_i случайной величины η, то можно определить случайную величину $\zeta = \xi + \eta$, которая принимает все возможные значения $z_i^j = x_i + y_j$. Каждому такому значению z_i^j случайной величины ζ ставится в соответствие вероятность p_i^j, равная вероятности пересечения событий A_i и B_j:

$$p_i^j = P(A_i \cap B_j).$$

Таким образом определяется закон распределения суммы двух случайных величин. Также можно определить законы распределения разности $\xi - \eta$, произведения $\xi\eta$ и частного $\frac{\xi}{\eta}$ случайных величин (последний – лишь в случае, если η не принимает нулевого значения).

Две случайные величины

$$\xi = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\};\ \ \eta = \{y_1, y_2, \ldots, y_m\},$$

определённые на одном и том же пространстве элементарных исходов, имеющие законы распределения

ξ	x_1	…	x_i	…
P	p_1^1	…	p_i^1	…

η	y_1	…	y_j	…
P	p_1^2	…	p_j^2	…

называются **независимыми**, если при любых i и j выполняется равенство

$$P((\xi = x_i) \cap (\eta = y_j)) = p_i^1\, p_j^2$$

Если это равенство **не выполняется хотя бы для одной пары** x_i, y_j, то случайные величины ξ и η называются **зависимыми**.

Пример1. Брошены две игральных кости. Число очков, выпавшее на первой кости, – случайная величина ξ. Число очков, выпавшее на второй кости – случайная величина η. Считаем, что все исходы $((\xi = i)\cap(\eta = j))$ $(i = 1,2,\ldots,6;$ $j = 1,2,\ \ldots,6)$ равновероятны, всего их 36, поэтому

$$P((\xi = i)\cap(\eta = j)) = \frac{1}{36}$$

Так как $P(\xi = i) = \frac{1}{6}$ и $P(\eta = j)) = \frac{1}{6}$, очевидно, что по определению ξ и η – независимые случайные величины.

Пример 2. Даны две независимые случайные величины ξ и η с заданными законами распределения

ξ	0	1
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

η	1	2
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$

Определим случайные величины α и β следующим образом: $\alpha = \xi + \eta$, $\beta = \xi\eta$. Выясним, являются ли независимыми случайные величины α и β.

Составим закон распределения α. Наименьшее значение α равняется 1. Вероятность события $\alpha = 1$ равна вероятности события $(\xi = 0)\cap(\eta = 1)$, которая в силу независимости ξ и η равна $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$. Событие $\alpha = 2$ совпадает с событием $((\xi = 0)\cap(\eta = 2))\cup((\xi = 1)\cap(\eta = 1))$. Его вероятность равна

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}=\frac{5}{12}.$$

Максимальное значение α, равное 3, имеет вероятность $\frac{1}{2}$. Таким образом, закон распределения случайной величины α можно представить таблицей

α	1	2	3
P	$\frac{1}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{6}{12}$

Закон распределения β представляется таблицей

β	0	1	2
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{1}{2}$

Рассмотрим события $\alpha = 3$ и $\beta = 0$. Очевидно, что

$$P(\alpha = 3)\ P(\beta = 0) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$$

С другой стороны, событие $(\alpha = 3)\cap(\beta = 0)$ − невозможное, так как $\alpha = 3$ только при $\xi = 1$, а $\beta = 0$ лишь при $\xi = 0$. Отсюда следует, что

$$P((\alpha = 3)\cap(\beta = 0)) = 0,$$

и теперь ясно, что, по крайней мере, в одном случае условие определения независимости для случайных величин α и β не выполняется. Отсюда следует, что эти случайные величины зависимы.

Задача I.

В студенческой группе 5 отличников, 4 хороших студента и 3 троечника. Отличник всегда сдаёт экзамен на 5, хороший студент – на 4 и троечник – на 3. Случайным образом были выбраны два студента и проэкзаменованы. Средний балл по этому экзамену– случайная величина. Написать её закон распределения.

Решение.

Если экзаменовались два отличника, то средний балл – 5. Два отличника попадают в выборку с вероятностью $C_5^2/C_{12}^2 = 5/33$. Если экзаменовались отличник и хороший студент, то средний балл равен 4,5. Такой состав выборки получается с вероятностью $5\cdot 4/C_{12}^2 = 10/33$. Средний балл равен 4, если в выборку попали два хороших студента. Такой же средний балл получается, если в выборке отличник и троечник. Суммарная вероятность этих событий

$C_4^2/C_{12}^2+5\cdot 3/C_{12}^2=7/22$. Средний балл равен 3,5, если экзаменовали хорошего студент а и троечника. вероятность такого состава выборки равна $4\cdot 3/C_{12}^2=2/11$. Наконец, средний балл равен 3, если экзаменовали двух троечников, что могло произойти с вероятностью $C_3^2/C_{12}^2=1/22$. В результате получаем закон распределения среднего балла

ξ	3	3,5	4	4,5	5
p	1/22	2/11	7/22	10/33	5/33

Задача II. . Собрана колода из четырёх карт – туза, короля, дамы и валета, расположенных в произвольном порядке. Случайная величина ξ – число карт между тузом и королём. Случайная величина η принимает значение 0, если туз оказался перед королём, и значение 1, если туз лежит после короля.

1) Построить закон распределения случайной величины ξ.
2) Определить, являются ли случайные величины ξ и η зависимыми.

Решение.

1) Четыре карты можно упорядочить в колоде числом способов, равным 4! = 24. Туз и король могут лежать рядом при 2 × 3! = 12 различных раскладах карт в колоде. Между тузом и королём может лежать одна карта при 8-ми различных раскладах карт в колоде. Между тузом и королём может лежать две карты при 4-х различных раскладах карт в колоде. Из этого следует, что закон распределения случайной величины ξ имеет вид

ξ	0	1	2
p	1/2	1/3	1/6

2) Пусть случайная величина η приняла значение 0, то есть туз лежит впереди короля. Этому условию удовлетворяют 12 возможных раскладов карт в колоде. Очевидно, что вероятность этого события равна 1/2. Перечислим расклады, в которых при и $\eta = 0$ и $\xi = 0$: Т К Д В, Т К В Д, Д Т К В, В Т К Д, Д В Т К, В Д Т К. Всего этих раскладов 6, следовательно

$$P((\xi = 0)\cap(\eta = 0)) = 1/4 = P(\xi = 0)P(\eta = 0)$$

Действуя аналогичным образом, можно убедиться в том, что аналогичные равенства справедливы для всех возможных значений ξ и η., откуда следует независимость случайных величин ξ и η.

Как можно понимать независимость случайных величин в данном случае? Предположим, что нас интересует, как расположены карты в рассматриваемой в задаче колоде, а именно, сколько карт лежит между тузом и королём. Априорная вероятность любого возможного числа карт даётся в приведенной выше таблице. Пусть мы получаем информацию, что в колоде туз лежит впереди короля. Пересчитав вероятности всех возможных чисел карт между тузом и королём, убеждаемся в том, что подсчитанные в новых условиях вероятности оказались равными априорным значениям. Это означает, что полученная информация о значении случайной величины η оказалась совершенно бесполезной.

Задача III.

В условии предыдущей задачи принять случайную величину η равной нулю, если туз лежит на первом месте в колоде, и равной 1 во всех остальных случаях. Определить, зависимы ли случайные величины ξ и η.

Ответ: зависимы.

Задача IV.

В условии предыдущей задачи принять случайную величину η равной нулю, если туз лежит на втором месте в колоде, и равной 1 во всех остальных случаях. Определить, зависимы ли случайные величины ξ и η.

Ответ: зависимы.

Задача V.

В условии предыдущей задачи принять случайную величину η равной нулю, если между тузом и королём нет карт, и равной 1 во всех остальных случаях. Определить, зависимы ли случайные величины ξ и η.

Ответ: зависимы.

Задача VI.

В условии предыдущей задачи принять случайную величину η равной нулю, если между тузом и королём одна карта, и равной 1 во всех остальных случаях. Определить, зависимы ли случайные величины ξ и η.

Ответ: зависимы.

Задача VII.

В урне 2 белых, 2 чёрных и 1 зелёный шар. Из урны наудачу извлекаются 3 шара. Случайная величина ξ – число белых шаров в выборке. Случайная величина η принимает значение 0, если в выборке есть зелёный шар, и принимает значение 1, если в выборке нет зелёного шара. Определить, зависимы ли случайные величины ξ и η.

Ответ: зависимы.

Задача VIII

По прогнозу акции корпорации C_1 поднимутся в цене с вероятностью 0,7. Независимо от них акции корпорации C_2 поднимутся в цене с вероятностью 0,5. Случайная величина ξ примет значение 0, если ни одна из акций C_1 и C_2 не поднимется в цене, значение 1, если только одна из этих акций поднимется в цене, и значение 2, если в цене поднимутся обе акции. Случайная величина η примет значение 0, если акция C_1 не поднимется в цене и значение 1, если эта акция поднимется в цене. Определить, зависимы ли случайные величины ξ и η.

Ответ: зависимы.