Случайный эксперимент, элементарные исходы, события.

Случайным (стохастическим) экспериментом или испытанием называется осуществление какого-либо комплекса условий, который можно практически или мысленно воспроизвести сколь угодно большое число раз.

Примеры случайного эксперимента: подбрасывание монеты, извлечение одной карты из перетасованной колоды.

Явления, происходящие при реализации этого комплекса условий, то есть в результате случайного эксперимента, называются **элементарными исходами**. Считается, что при проведении случайного эксперимента реализуется только один из возможных элементарных исходов.

Если монету подбросить один раз, то элементарными исходами можно считать выпадение герба (Г) или цифры (Ц).

Если случайным экспериментом считать троекратное подбрасывание монеты, то элементарными исходами можно считать следующие:

ГГГ, ГГЦ, ГЦГ, ЦГГ, ГЦЦ, ЦГЦ, ЦЦГ, ЦЦЦ.

Множество всех элементарных исходов случайного эксперимента называется **пространством элементарных исходов**. Будем обозначать пространство элементарных исходов буквой Ω (омега большая) i-й элементарный исход будем обозначатьω_i (ω – омега малая).

Если пространство элементарных исходов содержит n элементарных исходов, то

$$\Omega=(\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n).$$

Для троекратного подбрасывания монеты,

$$\Omega=(\text{ГГГ, ГГЦ, ...ЦЦЦ}).$$

Если случайный эксперимент – подбрасывание игральной кости, то $\Omega=(1,2,3,4,5,6)$.

Если Ω **конечно** или **счетно**, то **случайным событием** или просто **событием** называется любое подмножество Ω**.**

Множество называется счетным, если между ним и множеством N натуральных чисел можно установить взаимно-однозначное соответствие.

Пример счетного множества: множество возможных значений времени прилета инопланетян на Землю, если время отсчитывать с настоящего момента и исчислять с точностью до секунды.

Примеры несчетных множеств: множество точек на заданном отрезке, множество чисел x, удовлетворяющих неравенству $1< x \leq 2$.

В случае несчетного множества Ω будем называть событиями только подмножества, удовлетворяющие некоторому условию (об этом будет сказано позже).

Приведем примеры событий. Пусть бросается игральная кость, и элементарным исходом считается выпавшее число очков: Ω=(1,2,3,4,5,6). *A* — событие, заключающееся в том, что выпало четное число очков: *A*=(2,4,6); *B* — событие, заключающееся в том, что выпало число очков, не меньшее 3-х: *B*=(3,4,5,6).

Говорят, что те исходы, из которых состоит событие *A*, **благоприятствуют** событию *A*.

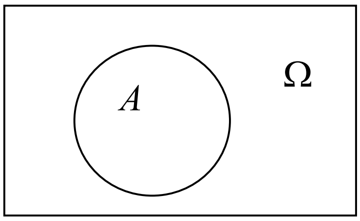

Рис. 1.

События удобно изображать в виде рисунка, который называется **диаграммой Венна.** На рисунке 1 пространство элементарных исходов Ω изображено в виде прямоугольника, а множество элементарных исходов, благоприятствующих событию *A*, заключено в эллипс. Сами исходы на диаграмме Венна не изображаются, а информация о соотношении между их множествами содержится в расположении границ соответствующих областей.

Суммой (объединением) двух событий *A* **и** *B* (обозначается $A \cup B$) называется событие, состоящее из всех элементарных исходов, принадлежащих по крайней мере одному из событий *A* или *B*. Объединение событий *A* и *B* изображено на рисунке 2 в виде заштрихованной области.

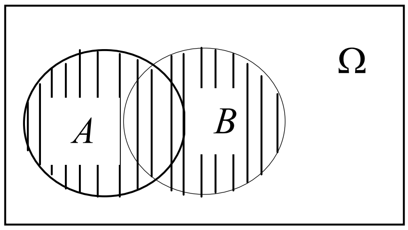

Рис. 2

Приведем пример объединения событий. Пусть два стрелка стреляют в мишень одновременно, и событие *A* состоит в том, что в мишень попадает 1-й стрелок, а событие ***B*** – в том, что в мишень попадает 2-й. Событие $A \cup B$ означает, что мишень поражена, или, иначе, что в мишень попал хотя бы один из стрелков.

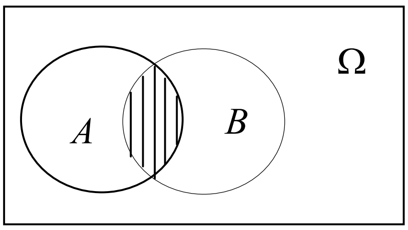

Рис. 3

Произведением (пересечением) $A \cap B$ событий *A* и *B* называется событие, состоящее из всех тех элементарных исходов, которые принадлежат и *A* и *B*. На рисунке 3 пересечение событий *A* и *B* изображено в виде заштрихованной области. В условиях приведенного выше примера событие $A \cap B$ заключается в том, что в мишень попали оба стрелка.

Разностью *A**B* или *A*–*B* событий *A* и *B* называется событие, состоящее из всех исходов события *A*, не благоприятствующих событию *B*. Диаграмма Венна разности событий *A* и *B* изображена на рисунке 4.

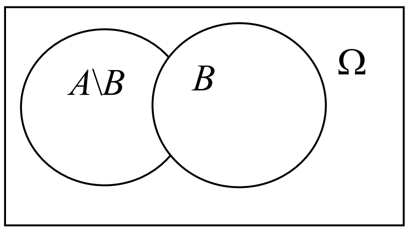

Рис. 4

В условиях рассмотренного выше примера событие $A\backslash B$ заключается в том, что первый стрелок попал в мишень, а второй промахнулся.

Событие Ω называется **достоверным** (оно обязательно происходит в результате случайного эксперимента).

Пустое множество $\varnothing$ называется **невозможным** событием. Событие $\overline{A}=\Omega\backslash A$ называется **противоположным** событию A или **дополнением** события A.

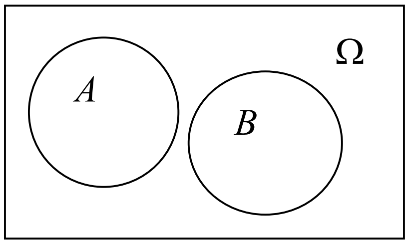

Рис. 5.

События A и B называются **несовместными**, если нет исходов, принадлежащих и A и B, то есть $A \cap B = \varnothing$. На рисунке 5 изображены несовместные события A и B.

Событие B будем называть **следствием** события A, если все исходы события A благоприятствуют событию B. То, что из A следует B записывается символом $A \subset B$ и изображается на диаграмме Венна так, как это показано на рисунке 6.

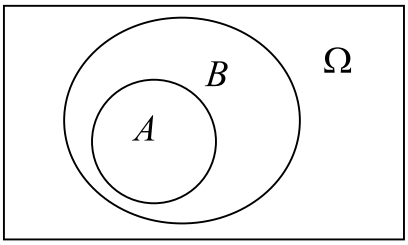

Рис. 6.

Непосредственно из введенных определений следуют равенства: $A \cup \overline{A} = \Omega$; $A \cap \overline{A} = \varnothing$; $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$; $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$. Два последних равенства называются формулами Де'Моргана.

Контрольные вопросы.

I. В инвестиционном портфеле собраны акции 5-ти различных корпораций (5-ти видов). Событие A состоит в том, что акции 1-го вида подорожали. Событие B состоит в том, что акции всех 5-ти видов подорожали.

Опишите события 1) $A \cup B$; 2) $A \cap B$; 3) $A\backslash B$; 4) $A\backslash(A \cap B)$; 5) $A \cup \overline{B}$

II. На предстоящих выборах губернатором Н-ской области может быть избран представитель партии “левых”, представитель партии “правых”, представитель партии “зелёных” или не избран никто. Событие A состоит в том, что будет избран представитель партии “левых”. Событие B состоит в том, что будет избран представитель партии “правых” или представитель партии “зелёных”.

Опишите события 1) $A \cup B$; 2) $A \cap B$; 3) $\overline{A}$: 4) $\overline{A \cup B}$; 5) $A \cup \overline{B}$

III. Инвестор собирается вложить капитал в обыкновенные акции. Ему предложены на выбор акции корпораций С1, С2, С3, С4. Инвестор может составить портфель из акций всех четырёх корпораций, может выбрать акции одной, двух или трёх корпораций и может вообще отказаться от предложенных акций. Наличие в портфеле тех или иных акций определяет исход сделки. Событие A состоит в том, что в акционерном портфеле оказываются акции С1, или С2, или и те и другие. Событие В состоит в том, что в портфеле нет ни акций С2, ни акций С3.

а) Опишите события 1) $\overline{A}$; 2) $\overline{B}$; 3) $A\cup\overline{B}$; 4) $A\cap B$; 5) $A\backslash\overline{B}$

б) Подсчитайте число исходов в каждом из приведенных выше событий.

Ответы на контрольные вопросы.

I. 1) A; 2) B; 3) акции 1-го вида подорожали, а какие-то из акций либо подешевели, либо остались в прежней цене; 4) $A\backslash B$; 5) Ω.

II. 1) губернатор будет избран; 2) $\varnothing$; 3) если губернатор будет избран, то он не будет “левым”; 4) губернатор не будет избран 5) если губернатор будет избран, то он будет “левым”.

III 1) если акции куплены, то среди них не будет ни акций С1, ни акций С2. Число исходов — 4. Для решения этой задачи изобразим выбор инвестора в виде последовательности из 4-х цифр. Первая цифра — 0, если акции С1 не куплены и — 1, если акции С1 куплены. Вторая цифра — 0, если акции С2 не куплены, и т. д. Очевидно, что у инвестора всего 16 возможностей выбора. Событие $\overline{A}$ состоит в том, что первые две цифры в такой последовательности – нули. Каждая из двух последних цифр может быть нулём или единицей, следовательно, возможно 4 исхода.

2) акции будут куплены и среди них будут либо акции С2, либо акции С3, либо и те и другие. Число исходов — 12. Это следует из того, что в описанной выше последовательности хотя бы одна из двух цифр, занимающих второе и третье место, должна быть единицей, то есть, возможны следующие комбинации этих цифр: 10, 01, 11. Каждая из этих трёх комбинаций может встретиться с четырьмя возможными комбинациями нулей и единиц, стоящих на первом и четвёртом местах.

3) из всех 16-ти исходов сюда не входят лишь два исхода, изображаемые последовательностями, начинающимися с цифр 000. Это значит, что если акции будут куплены, то не может быть ситуации, при которой в портфель не войдут ни акции С1, ни акции С2 ни акции С3.

4) акции куплены и возможны только два варианта состава портфеля: только акции С1 или акции С1 и С4. Это значит, что последовательность цифр должна начинаться с тройки 100.

5) $A\backslash\overline{B} = A\cap B$. В справедливости этого равенства убедитесь, построив диаграмму Венна. Ответ здесь тот же, что и в пункте 4).

Вероятностное пространство Случай конечного или счетного числа исходов.

Для построения полной и законченной теории случайного эксперимента или теории вероятностей, помимо введенных исходных понятий случайного эксперимента, элементарного исхода, пространства элементарных исходов, события, введем аксиому (пока для случая конечного или счетного пространства элементарных исходов).

Каждому элементарному исходу ω_i пространства Ω соответствует некоторая неотрицательная числовая характеристика P_i шансов его появления, называемая вероятностью исхода ω_i, причем

$$P_1 + P_2 + \ldots + P_n + \ldots = \sum_{i:\omega_i \in \Omega} P_i = 1$$

(здесь суммирование ведется по всем i, для которых выполняется условие: $\omega_i \in \Omega$).

Отсюда следует, что $0 \le P_i \le 1$для всех i.

Вероятность любого события A определяется как сумма вероятностей всех элементарных исходов, благоприятствующих событию A. Обозначим ее $P(A)$.

$$P(A) = \sum_{i:\omega_i \in A} P(\omega_i) = \sum_{i:\omega_i \in A} P_i \qquad (*)$$

Отсюда следует, что

1) $0 \le P(A) \le 1$; 2) $P(\Omega)=1$; 3) $P(\varnothing)=0$.

Будем говорить, что задано **вероятностное пространство**, если задано пространство элементарных исходов $\boldsymbol{\Omega}$ и определено соответствие

$$\omega_i \to P(\omega_i) = P_i.$$

Возникает вопрос: как определить из конкретных условий решаемой задачи вероятность $P(\omega_i)$ отдельных элементарных исходов?

Классическое определение вероятности.

Вычислять вероятности $P(\omega_i)$ можно, используя априорный подход, который заключается в анализе специфических условий данного эксперимента (до проведения самого эксперимента).

Возможна ситуация, когда пространство элементарных исходов состоит из конечного числа N элементарных исходов, причем случайный эксперимент таков, что вероятности осуществления каждого из этих N элементарных исходов представляются равными. Примеры таких случайных экспериментов: подбрасывание симметричной монеты, бросание правильной игральной кости, случайное извлечение игральной карты из перетасованной колоды. В силу введенной аксиомы вероятность каждого элементарного исхода в этом случае равна $\frac{1}{N}$. Из этого следует, что если событие A содержит N_A элементарных исходов, то в соответствии с определением (*)

$$P(A) = \frac{N_A}{N}$$

В данном классе ситуаций вероятность события определяется как отношение числа благоприятных исходов к общему числу всех возможных исходов.

Пример. Из набора, содержащего 10 одинаковых на вид электроламп, среди которых 4 бракованных, случайным образом выбирается 5 ламп. Какова вероятность, что среди выбранных ламп будут 2 бракованные?

Прежде всего, отметим, что выбор любой пятерки ламп имеет одну и ту же вероятность. Всего существует C_{10}^5 способов составить такую пятерку, то есть случайный эксперимент в данном случае имеет C_{10}^5 равновероятных исходов.

Сколько из этих исходов удовлетворяют условию "в пятерке две бракованные лампы", то есть, сколько исходов принадлежат интересующему нас событию?

Каждую интересующую нас пятерку можно составить так: выбрать две бракованные лампы, что можно сделать числом способов, равным C_4^2. Каждая пара бракованных ламп может встретиться столько раз, сколькими способами ее можно дополнить тремя не бракованными лампами, то есть C_6^3 раз. Получается, что число пятерок, содержащих две бракованные лампы, равно $C_4^2 \cdot C_6^3$.

Отсюда, обозначив искомую вероятность через P, получаем:

$$P = \frac{C_4^2 \cdot C_6^3}{C_{10}^5} = \frac{10}{21}$$

Задачи с решениями.

Задача I .Карты из колоды в 32 листа розданы трём игрокам: A, B и C. Игрок A получил 12 карт, среди которых 5 карт червовой масти: туз, король, валет, десятка и девятка. Остальные игроки получили по 10 карт. Найти вероятность того, что у игрока A или у игрока B на руках три оставшихся карты червовой масти: дама, восьмёрка и семёрка.

Задача II. На производственном совещании, на котором присутствовали 5 участников, было внесено 6 предложений по повышению эффективности работы предприятия. Найти вероятность того, что каждый из участников внёс, по крайней мере, одно предложение.

Задача III. Колода карт в 32 листа раздана 4-м игрокам, каждому по 8 карт. Найти вероятность того, что все четыре туза достались одному игроку.

Задача IV. 10 букв разрезной азбуки: А,А,А,Е,И,К,М,М,Т,Т произвольным образом выкладываются в ряд. Какова вероятность того, что получится слово МАТЕМАТИКА?

Задача V. Брошено 10 игральных костей. Предполагается, что все комбинации выпавших очков равновероятны. Найти вероятность того, что выпала хотя бы одна шестёрка.

Задача VI. Бросается n игральных костей. Найти вероятность того, что на всех костях выпало одно и то же количество очков.

Задача VII. Между двумя игроками проводится n партий, причем каждая партия кончается или выигрышем, или проигрышем, и всевозможные исходы партий равновероятны. Найти вероятность того, что определённый игрок выиграет ровно m партий, $0 \le m \le n$.

Ответы. I. 4/19. **II.** ·4/19. **III.** 7/899. **IV.** 3!2!2!/10! **V.** $1 - 5^{10}/6^{10}$. **VI.** $1/6^{n-1}$. **VII.** $C_n^m \,/\, 2^n$

Решения. I. Общее число исходов, это число вариантов распределения оставшихся 20-ти карт между игроками B и C. Это число равно C_{20}^{10}. Подсчитаем теперь число благоприятных исходов. Пусть оставшиеся три червы достались игроку B. Тогда число вариантов набора из 10-ти карт, содержащего эту тройку карт равно C_{17}^{7}. Естественно, что если игрок B получил свои 10 карт, оставшиеся 10 карт неизбежно получает игрок C. Аналогичный результат получается, если предположить, что три червы оказываются у игрока C. Таким образом, ответ задачи определяется формулой $2C_{17}^{7} / C_{20}^{10}$, и искомая вероятность равна 4/19.

II. Принимая во внимание, что из условия нам неизвестно, какие это предложения, и нас интересует лишь количественная сторона дела, будем считать, что общее число исходов равно C_{10}^{4} (полная аналогия с комбинаторной задачей об одинаковых подарках – **Задача V** предыдущей темы). Число благоприятных исходов. равно 5. Тогда искомая вероятность равна 1/42.

III. Общее число вариантов распределения карт среди 4-х игроков равно $C_{32}^{8}C_{24}^{8}C_{16}^{8}$. Пусть первый игрок получил 4 туза. Тогда число вариантов набора доставшихся ему карт равно C_{28}^{4}. Всего вариантов распределения карт между 4-мя участниками в этом случае будет равно $C_{28}^{4}C_{24}^{8}C_{16}^{8}$. Нужно учесть, что четыре туза могут попасть любому из 4-х участников. Окончательно получаем, что искомая вероятность равна $4C_{28}^{4} / C_{32}^{8}$ или $7/899 \approx 0{,}007786$.

IV.10 букв можно расположить в ряд числом способов, равным 10! Чтобы получить число благоприятных исходов, нужно взять слово МАТЕМАТИКА и убедиться в том, что его можно получить, переставляя местами 3 буквы А, 2 буквы М и 2 буквы Т, что можно сделать 3!2!2! способами Ответ задачи: 3!2!2!/10!

V. Общее число исходов здесь равно 6^{10}. К благоприятным исходам следует отнести выпадение одной, двух, трёх и т. д. шестёрок. Проще подсчитать число неблагоприятных исходов, то есть исходов, когда не выпало ни одной шестёрки. Их, очевидно, 5^{10}, и число благоприятных исходов равно $6^{10} - 5^{10}$. Искомая вероятность равна $1 - 5^{10}/6^{10}$.

VI. Общее число исходов здесь равно 6^n. Число благоприятных исходов – 6. Ответ задачи: $1/6^{n-1}$.

VII Каждая партия имеет два исхода – выигрыш одного или другого участника. Для двух партий имеется $2^2 = 4$ исходов, для трёх партий – $2^3 = 8$ исходов, для n партий – 2^n исходов. Среди них ровно C_n^m исходов соответствуют выигрышу одного из игроков m партий. Таким образом, искомая вероятность равна $C_n^m \,/\, 2^n$

Задачи для самостоятельного решения.

1) В урне a белых и b чёрных шаров ($a \geq 2$; $b \geq 2$). Из урны без возвращения извлекаются 2 шара. Найти вероятность того, что шары одного цвета.

2) В урне находятся a белых и b черных шаров. Шары без возвращения извлекаются из урны. Найти вероятность того, что k-й вынутый шар оказался белым.

3) Колода из 32-х карт тщательно перетасована. Найти вероятность того, что все четыре туза лежат в колоде один за другим, не перемежаясь другими картами.

4) n человек рассаживаются в ряд в случайном порядке. Какова вероятность, что два определенных человека окажутся рядом?

5) Из 28 костей домино случайным образом выбираются две. Найти вероятность того, что из них можно составить "цепочку", согласно правилам игры.

6) Из букв разрезной азбуки составлено слово СТАТИСТИКА. Затем из этих букв случайным образом без возвращения отобрано 5 букв. Найти вероятность того, что из отобранных букв можно составить слово ТАКСИ.

7) Чему равна вероятность того, что два бросания трёх разноцветных игральных костей дадут один и тот же результат?

8) В лифт 8-этажного дома на первом этаже вошли 5 человек. Каждый из них с равной вероятностью может выйти на любом из этажей, начиная со второго. Найти вероятность того, что все пятеро выйдут на разных этажах.

9) Найти вероятность того, что среди произвольно выбранных 12-ти человек все имеют дни рождения в разные месяцы.

10) В кармане лежат 10 ключей, из которых к данному замку подходит лишь один, но неизвестно, какой. Из кармана извлекаются ключи случайным образом один за другим, и делается попытка открыть замок. Найти вероятность того, что замок будет открыт с 7-й попытки.

11) Для уменьшения общего количества игр $2n$ команд спортсменов разбиваются на две подгруппы. Определить вероятность того, что две наиболее сильные команды окажутся: а) в разных подгруппах, б) в одной подгруппе.

12) Из группы, состоящей из 6-ти человек, трое из которых говорят по-английски, случайным образом отбирают 3-х человек. Найти вероятность того, что среди выбранных людей не менее 2-х говорят по-английски.

Ответы: **1**) $\left(C_a^2 + C_b^2\right)/ C_{a+b}^2$; **2**) $a/(a + b)$; **3**) 29!4!/32!=1/1240; **4**) $2/n$; **5**) 7/18; **6**) 2/21 **7**) 1/216; **8**) $A_7^5 / 7^5$; **9**) $11!/12^{11}$; **10**) 1/10; **11**) а) $n/(2n$-1); б) $(n-1)/(2n-1)$; **12**) 1/2