Непрерывные случайные величины.

Случайная величина, значения которой заполняют некоторый промежуток, называется непрерывной.

В частных случаях это может быть не один промежуток, а объединение нескольких промежутков. Промежутки могут быть конечными, полубесконечными или бесконечными, например: $(a; b]$, $(-\infty; a)$, $[b;\infty)$, $(-\infty; \infty)$.

Вообще непрерывная случайная величина – это абстракция. Снаряд, выпущенный из пушки, может пролететь любое расстояние, скажем, от 5 до 5,3 километров, но никому не придёт в голову измерять эту величину с точностью до 0,0000001 километра (то есть до миллиметра), не говоря уже об абсолютной точности. В практике такое расстояние будет дискретной случайной величиной, у которой одно значение от другого отличается по крайней мере на 1 метр.

При описании непрерывной случайной величины принципиально невозможно выписать и занумеровать все её значения, принадлежащие даже достаточно узкому интервалу. Эти значения образуют несчётное множество, называемое «континуум».

Если ξ – непрерывная случайная величина, то равенство $\xi = x$ представляет собой, как и в случае дискретной случайной величины, некоторое случайное событие, но для непрерывной случайной величины это событие можно связать лишь с вероятностью, равной нулю, что однако не влечёт за собой невозможности события. Так, например, можно говорить, что только с вероятностью «нуль» снаряд пролетит 5245,7183 метра, или что отклонение действительного размера детали от номинального составит 0,001059 миллиметра. В этих случаях практически невозможно установить, произошло событие или нет, так как измерения величин проводятся с ограниченной точностью, и в качестве результата измерения можно фактически указать лишь границы более или менее узкого интервала, внутри которого находится измеренное значение.

Вероятность, отличная от нуля, может быть связана только с попаданием величины в заданный, хотя бы и весьма узкий, интервал. Здесь можно привести сравнение с распределением массы вдоль стержня. Отсутствует масса, сосредоточенная, скажем, в сечении, расположенном на расстоянии 20 см от левого конца стержня, имеет смысл говорить лишь о массе, заключённой между сечениями, проходящими через концы некоторого промежутка.

Пусть ξ – непрерывная случайная величина. Рассмотрим для некоторого числа x вероятность неравенства $x < \xi < x + \Delta x$

$$P(x < \xi < x + \Delta x).$$

Здесь Δx – величина малого интервала.

Очевидно, что если $\Delta x \to 0$, то $P(x < \xi < x + \Delta x) \to 0$. Обозначим $p(x)$ предел отношения $P(x < \xi < x + \Delta x)$ к Δx при $\Delta x \to 0$, если такой предел существует:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{P(x < \xi < x + \Delta x)}{\Delta x} = p(x) \qquad (1)$$

Функция $p(x)$ называется плотностью распределения случайной величины. Из формулы (1) следует равенство, справедливое для малых величин Δx, которое также можно считать определением функции $p(x)$:

$$P(x < \xi < x + \Delta x) \cong p(x)\Delta x \qquad (2)$$

Очевидно, что $p(x)$ – неотрицательная функция. Для определения вероятности того, что случайная величина ξ примет значение из промежутка $[a, b]$ конечной длины, нужно выбрать на промежутке произвольные числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ удовлетворяющие условию $a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_n<b=x_{n+1}$. Эти числа разобьют промежуток $[a, b]$ на n+1 частей, представляющих собой промежутки $[x_0, x_1)$, $[x_1, x_2)$, …,$[x_n, b]$. Введём обозначения:

$$\Delta x_0 = x_1 - x_0,\ \Delta x_1 = x_2 - x_1,\ \ldots,\ \Delta x_n = b - x_n,$$

и составим сумму $\sum_{i=1}^{n} p(x_i)\Delta x_i$. Рассмотрим процесс, при котором число точек разбиения неограниченно возрастает таким образом, что максимальная величина Δx_i стремится к нулю. Будем считать функцию $p(x)$ непрерывной на промежутке $(a; b)$, тогда пределом суммы $\sum_{i=1}^{n} p(x_i)\Delta x_i$ будет определённый интеграл по промежутку $[a; b]$ от функции $p(x)$, равный искомой вероятности:

$$P(a \le \xi \le b) = \int_a^b p(x)dx$$

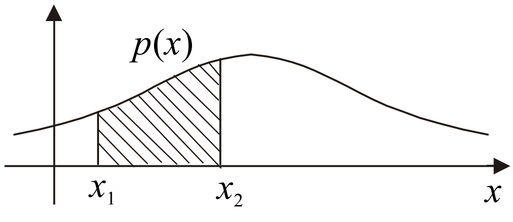

Рис. 1

Это равенство можно также рассматривать как определение функции $p(x)$. Отсюда следует, что вероятность попадания случайной величины в любой интервал (x_1, x_2) равна площади фигуры, образованной отрезком $[x_1, x_2]$ оси x, графиком функции $p(x)$ и вертикальными прямыми $x = x_1$, $x = x_2$, как изображено на рисунке 1.

Если все возможные значения случайной величины принадлежат интервалу (a; b), то для $p(x)$ – её плотности распределения справедливо равенство

$$\int_a^b p(x)dx = 1$$

Для удобства иногда считают функцию $p(x)$ определённой для всех значений x, полагая её равной нулю в тех точках x, которые не являются возможными значениями этой случайной величины.

Плотностью распределения может служить любая интегрируемая функция $p(x)$, удовлетворяющая двум условиям:

1) $p(x) \geq 0$;
2) $\int_{-\infty}^{\infty} p(x)dx = 1$

Последнее свойство называется свойством нормировки. Можно задавать случайную величину, задавая функцию $p(x)$, удовлетворяющую этим условиям.

В качестве примера рассмотрим случайную величину ξ, **равномерно распределённую** на промежутке [a; b]. В этом случае $p(x)$ постоянна внутри этого промежутка:

$$p(x) = \begin{cases} c & a \leq x \leq b \\ 0 & x < a; x > b \end{cases}$$

По свойству 2) функции $p(x)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x)dx = \int_a^b c dx = c(b-a) = 1$$

Отсюда $c = \dfrac{1}{b-a}$. График функции $p(x)$ представлен на рисунке 2.

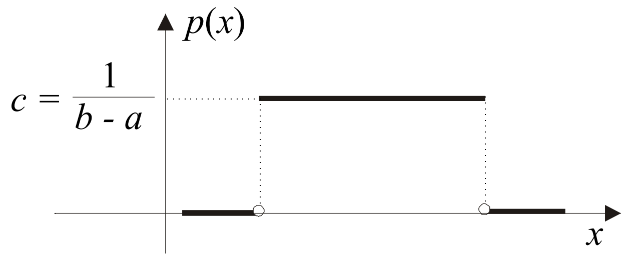

Рис. 2

Во многих практических задачах встречаются случайные величины, у которых возможные значения не ограничены сверху и снизу. В этом случае кривая распределения располагается над осью x и при $x \to \infty$ и $x \to -\infty$ асимптотически приближается к этой оси, как изображено на рисунке 1. Вероятность того, что случайная величина ξ примет значение, меньшее некоторого числа a, равна площади фигуры, заключённой между кривой распределения и горизонтальной координатной осью слева от точки *a*. Будем считать, что такая площадь существует.

Пусть ξ – непрерывная случайная величина. Функция $F(x)$, которая определяется равенством

$$F(x) = P(\xi \le x),$$

называется **интегральной функцией распределения** или просто **функцией распределения** случайной величины ξ. Непосредственно из определения следует равенство $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} p(t)dt$. Формула производной определённого интеграла по верхнему пределу в данном случае приводит к соотношению $F'(x) = p(x)$. Плотность распределения $p(x)$ называют **дифференциальной функцией распределения.**

Функция распределения $F(x)$ случайной величины ξ имеет следующие свойства.

1. $F(x)$ — непрерывная возрастающая функция.
2. $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0$; $\lim\limits_{x\to\infty} F(x) = 1$

Свойства 1 и 2 вытекают непосредственно из определения функции $F(x)$.

3. Приращение $F(x)$ на промежутке $(x_1; x_2)$ равно вероятности того, что случайная величина ξ принимает значение из этого промежутка:

$$F(x_2) - F(x_1) = P(x_1 < \xi \le x_2)$$

Доказательство.

$$F(x_2) = P(\xi \le x_2) = P(\xi \le x_1) + P(x_1 < \xi \le x_2) = F(x_1) + P(x_1 < \xi \le x_2)$$

Отсюда

$$P(x_1 < \xi \le x_2) = F(x_2) - F(x_1)$$

Заметим, что для непрерывной случайной величины ξ справедливы равенства

$$P(x_1 < \xi \le x_2) = P(x_1 < \xi < x_2) = P(x_1 \le \xi < x_2) = P(x_1 \le \xi \le x_2)$$

Для равномерного распределения функция $F(x)$ имеет вид:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le a \\ \int\limits_a^x \dfrac{dt}{b-a} = \dfrac{x-a}{b-a} & \text{при } a < x < b \\ 1 & \text{при} \quad x \ge b \end{cases}$$

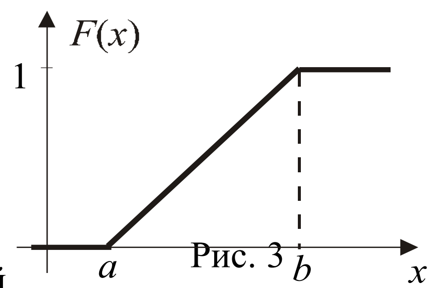

Рис. 3

График функции $F(x)$ представлен на рисунке 3.

Закон распределения непрерывной случайной величины можно определить заданием либо функции $p(x)$, либо функции $F(x)$.

Функцию распределения $F(x)$ можно построить и для дискретной случайной величины ξ, если задан закон распределения этой случайной величины.

Пусть задана дискретная случайная величина ξ с законом распределения

ξ	1	2	3
P	0,2	0,5	0,3

Построим функцию $F(x)$, используя определение $F(x) = P(\xi \le x)$.

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x<1 \\ 0{,}2 & \text{при} \quad 1\le x<2 \\ 0{,}7 & \text{при} \quad 2\le x<3 \\ 1 & \text{при} \quad x\ge 3 \end{cases}$$

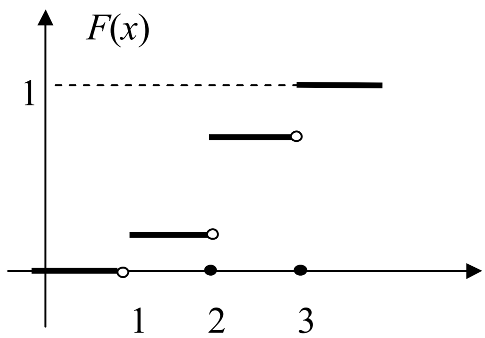

Рис. 4

График функции $F(x)$ изображён на рисунке 3.

Очевидно, что закон распределения дискретной случайной величины можно задать с помощью таблицы, где каждому значению этой случайной величины ставится в соответствие вероятность, или с помощью функции распределения.

Математическое ожидание и дисперсия непрерывной случайной величины.

Математическое ожидание непрерывной случайной величины ξ определяется равенством

$$M\xi = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx$$

в предположении, что интеграл существует (сходится). Здесь сохраняется смысл математического ожидания как среднего значения случайной величины.

Все свойства математического ожидания, приведённые ранее для дискретных случайных величин, имеют место и для непрерывных случайных величин.

Отметим два важных свойства математического ожидания непрерывных случайных величин.

1. Если плотность распределения $p(x)$ случайной величины ξ – чётная функция, то $M\xi = 0$.

Доказательство.

$$M\xi = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx = \int_{-\infty}^{0} xp(x)dx + \int_{0}^{\infty} xp(x)dx$$

Теперь в первом из двух интегралов в правой части равенства сделаем замену $t = -x$:

Рис. 5

$$\int_{-\infty}^{0} xp(x)dx = \int_{\infty}^{0} (-t)p(-t)d(-t) = \int_{\infty}^{0} tp(t)dt = -\int_{0}^{\infty} tp(t)dt$$

Окончательно получаем

$$M\xi = -\int_{0}^{\infty} tp(t)dt + \int_{0}^{\infty} xp(x)dx = 0\,.$$

2. Если ось симметрии графика плотности распределения $p(x)$ случайной величины ξ проходит через точку $x = \nu$, то есть $p(-x + \nu) = p(-x + \nu)$, то $M\xi = \nu$.

Доказательство аналогично приведенному выше.

Очевидно, можно сформулировать аналогичные свойства математического ожидания для дискретных случайных величин.

Дисперсия непрерывной случайной величины ξ определяется равенством

$$D\xi = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M\xi)^2 p(x)dx$$

Дисперсия непрерывной случайной величины имеет те же свойства, что и дисперсия дискретной случайной величины. Величина $\sqrt{D\xi}$ называется среднеквадратическим отклонением.

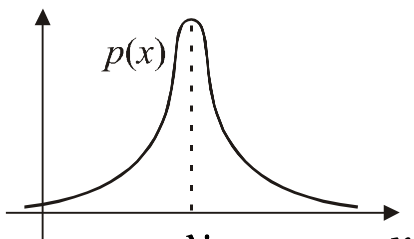

Рис. 4

Если график плотности распределения случайной величины ξ имеет единственный ярко выраженный пик в точке $x = \nu$, как на рисунке 4, то это означает, что ξ принимает с большой вероятностью значения из малого промежутка около $x = \nu$ (или, иначе, возможные значения ξ тесно сконцентрированы около числа ν). Такая случайная величина имеет относительно малую дисперсию.

Пусть график плотности распределения случайной величины ξ пологий и не имеет выраженного пика, как на рисунке 5. Тогда внутри довольно большой области можно взять различные промежутки одинаковой длины, и вероятности попадания случайной величины в эти промежутки будут отличаться незначительно. В этом случае дисперсия ξ относительно велика.

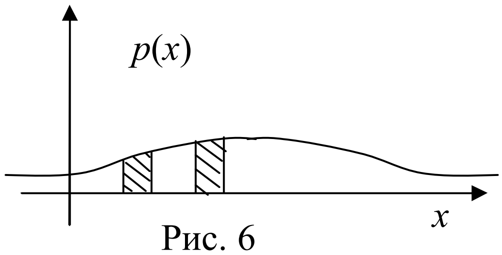

Рис. 6

Если ξ – размер детали, выпускаемой автоматическим станком, настроенным на размер ν, то график, изображённый на рисунке 4, характерен для случая, когда станок хорошо налажен: отклонения от номинальной величины ν встречаются редко или маловероятны. График плотности распределения, изображённый на рисунке 5, свидетельствовал бы о том, что механизм станка расстроен: здесь часто (или с большой вероятностью) встречаются детали с большим отклонением от номинального размера ν.

Напомним читателю, что на обоих приведённых рисунках площади фигур, заключённых между горизонтальной координатной осью и графиками плотности распределения, одинаковы и равны единице.

Приведём пример расчёта математического ожидания и дисперсии для случайной величины, равномерно распределённой на промежутке $[a;\ b]$. Ранее было получено выражение для плотности распределения такой случайной величины:

$$p(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x<a \\ \dfrac{1}{b-a} & \text{при} \quad a\le x\le b \\ 0 & \text{при} \quad x>b \end{cases}$$

$$M\xi=\frac{1}{b-a}\int_a^b x\,dx=\frac{1}{b-a}\frac{x^2}{2}\bigg|_a^b=\frac{1}{b-a}\frac{b^2-a^2}{2}=\frac{a+b}{2}$$

Точка $\dfrac{a+b}{2}$ лежит в середине промежутка $[a;\ b]$, и этот результат можно было получить, используя второе из приведённых выше свойств математического ожидания непрерывной случайной величины.

$$D\xi=\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2\frac{1}{b-a}dx=\frac{1}{b-a}\left(\int_a^b x^2dx-(a+b)\int_a^b x\,dx+\frac{(a+b)^2}{4}\int_a^b dx\right)=$$

$$=\frac{1}{b-a}\frac{b^3-a^3}{3}-\frac{(a+b)(b^2-a^2)}{2(b-a)}+\frac{(a+b)^2(b-a)}{4(b-a)}=\frac{(b-a)^2}{12}$$

Отсюда видно, что чем длиннее промежуток, тем больше дисперсия случайной величины, равномерно распределённой на этом промежутке.

Задача 1.

Плотность распределения случайной величины ξ имеет вид

$$p(x)=\begin{cases} c\cos x & -\pi/2 \le x \le \pi/2 \\ 0 & x<-\pi/2;\ x>\pi/2 \end{cases}$$

Найти $M\xi$, $D\xi$, $F(x)$, $P(\pi/6 < x < \pi/3)$.

Решение.

Сначала определим величину параметра c. По свойству нормировки

$$c\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos x dx = 1$$

Отсюда следует, что $c= 1/2$. Математическое ожидание случайной величины равно 0, так как плотность распределения – чётная функция. Дисперсию случайной величины определим по формуле $D\xi = \frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} x^2\cos x dx$. Вычислив определённый интеграл, получаем $D\xi = \pi^2/4 - 1$. Функция $F(x)$ на промежутке $(-\infty; -\pi/2)$ равна нулю, на промежутке $(-\pi/2; \pi/2)$ эта функция равна $(1 + \sin x)/2$, на промежутке $(\pi/2; \infty)$ функция равна 1.

$$P(\pi/6<\xi<\pi/3)=(1+\sin x)/2\Big|_{\pi/6}^{\pi/3}=\frac{\sqrt{3}-1}{4}$$

Задача 2.

Функция распределения случайной величины ξ имеет вид

$$F(x)=\begin{cases} 0 & x<1 \\ 0{,}25\left(x^3-x^2+x-1\right) & 1\le x\le 2 \\ 1 & x>2 \end{cases}$$

Найти $M\xi$, $D\xi$, $P(1 < x < 1{,}5)$.

Задача 3.

Плотность распределения случайной величины ξ имеет вид

$$F(x)=\begin{cases} 0 & x<2 \\ \dfrac{a}{x-1} & 2\le x\le 3 \\ 0 & x>3 \end{cases}$$

Найти $M\xi$, $D\xi$, $F(x)$ $P(1 < x < 2{,}5)$