Анализ данных в политических науках. Тестрирование гипотез

Н. В. Артамонов, И. А. Истомин

МГИМО МИД России

27 ноября 2017 г.

МГИМО УНИВЕРСИТЕТ

Содержание

Методология

В рамках статистической модели формулируется некоторая гипотеза или утверждение (например, мотивированное целью исследования)

Постановка задачи

Гипотеза согласуется с данными или противоречит им?

Методология

В рамках статистической модели формулируется некоторая гипотеза или утверждение (например, мотивированное целью исследования)

Постановка задачи

Гипотеза согласуется с данными или противоречит им?

Типичная ситуация: утверждение формулируется в терминах параметров модели

Замечание

Тестирование гипотез иногда называется inferences.

Методология тестирования

Формулируется тестируемая (нулевая) гипотеза H_0 и, как правило, альтернатива H_1

Методология тестирования

Формулируется тестируемая (нулевая) гипотеза H_0 и, как правило, альтернатива H_1

Цель

На основании статистических данных:

1. либо отвергаем H_0 в пользу альтернативы H_1 (гипотеза противоречит наблюдениям)
2. либо не отвергаем H_0 (гипотеза не противоречит наблюдениям)

Методология тестирования

Формулируется тестируемая (нулевая) гипотеза H_0 и, как правило, альтернатива H_1

Цель

На основании статистических данных:

1. либо отвергаем H_0 в пользу альтернативы H_1 (гипотеза противоречит наблюдениям)
2. либо не отвергаем H_0 (гипотеза не противоречит наблюдениям)

Важно!

Во второй ситуации в общем случае не следует, что H_0 верна.

Уровень значимости

Возможные две ошибки:

1. неверно отвергнуть H_0 (ошибка I рода)
2. неверно принять H_0 (ошибка II рода)

Уровень значимости

Возможные две ошибки:

1. неверно отвергнуть H_0 (ошибка I рода)
2. неверно принять H_0 (ошибка II рода)

Определение

Уровень значимости α: вероятность ошибки первого рода, т.е. вероятность неверно отвергнуть нулевую гипотезу (иногда удобно понимать как «риск»)

Важно!

Уровень значимость фиксируется заранее и выбирается a priori. В прикладных исследованиях как правило выбирается $\alpha = 1\%, 5\%, 10\%$.

Как тестировать?

Два способа тестирования гипотезы:

- с использованием P-значения[1];
- с использованием тестовой статистики.

Важно!

Оба подхода равносильны, но в научных публикациях использование P-значений считается «плохим тоном»!

Важно!

Для основных гипотез статистическое программы приводят и тестовые статистики, и P-значения.

---

[1] P = Probability

Использование P-значений

Для гипотеза H_0 в рамках выбранной статистической модели вычисляется (как правило автоматически) т.н. P-значение.

Статистическое правило (универсальное!)

- Нулевую гипотезу отвергаем при P $< \alpha$.
- Нулевую гипотезу не отвергаем при P $> \alpha$.

Неформальное статистическое правило

Нулевую гипотезу отвергаем, если P-значение «маленькое» (относительно уровня значимости)

Использование тестовых статистик

Для гипотеза H_0 в рамках выбранной статистической модели вычисляются т.н. тестовая статистика T.

Известно, что при справедливости H_0 тестовая статистика имеет известное распределение Distr.

По заданному уровню значимости вычисляем критическое значение T_{cr} распределения Distr

Использование тестовых статистик

Для гипотеза H_0 в рамках выбранной статистической модели вычисляются т.н. тестовая статистика T.

Известно, что при справедливости H_0 тестовая статистика имеет известное распределение Distr.

По заданному уровню значимости вычисляем критическое значение T_{cr} распределения Distr

Статистическое правило

Из сравнения T и T_{cr} делаем вывод отвергать H_0 или нет.

Замечание

Правило сравнения в каждом случае своё (зависит от H_0&H_1).

Стандартные тесты: t-тест

Основан на распределении Стьюдента (t-распределении).

Параметр распределения: степени свободы df.

Тестовая t-статистика и df зависят от модели и H_0.

Статистическое правило

- H_0 отвергаем при $|t| > t_{cr}$.
- H_0 не отвергаем при $|t| < t_{cr}$

Стандартные тесты: t-тест

Основан на распределении Стьюдента (t-распределении).

Параметр распределения: степени свободы df.

Тестовая t-статистика и df зависят от модели и H_0.

Статистическое правило

- H_0 отвергаем при $|t| > t_{cr}$.
- H_0 не отвергаем при $|t| < t_{cr}$

Как вычислить критическое значение?

- MS Excel: функция СТЬЮДРАСПОБР(α, df)
- R: функция qt(p=1-$\alpha/2$, df)

Стандартные тесты: F-тест

Основан на распределении Фишера (F-распределении).

Параметр распределения: степени свободы df1 и df2.

Тестовая F-статистика и df1, df2 зависят от модели и H_0.

Статистическое правило

- H_0 отвергаем при $F > F_{cr}$.
- H_0 не отвергаем при $F < F_{cr}$

Стандартные тесты: F-тест

Основан на распределении Фишера (F-распределении).

Параметр распределения: степени свободы df1 и df2.

Тестовая F-статистика и df1, df2 зависят от модели и H_0.

Статистическое правило

- H_0 отвергаем при $F > F_{cr}$.
- H_0 не отвергаем при $F < F_{cr}$

Как вычислить критическое значение?

- MS Excel: функция FРАСПОБР(α, df1, df2)
- R: функция qf(p=1-α, df1, df2)

Стандартные тесты: χ^2-тест

Основан на распределении χ^2 Пирсона

Параметр распределения: степени свободы df.

Тестовая χ^2-статистика и df зависят от модели и H_0.

Статистическое правило

- H_0 отвергаем при $\chi^2 > \chi^2_{cr}$.
- H_0 не отвергаем при $\chi^2 < \chi^2_{cr}$

Стандартные тесты: χ^2-тест

Основан на распределении χ^2 Пирсона

Параметр распределения: степени свободы df.

Тестовая χ^2-статистика и df зависят от модели и H_0.

Статистическое правило

- H_0 отвергаем при $\chi^2 > \chi^2_{cr}$.
- H_0 не отвергаем при $\chi^2 < \chi^2_{cr}$

Как вычислить критическое значение?

- MS Excel: функция ХИ2ОБР(α, df)
- R: функция qchisq(p=1-α, df)

1. Методология тестирования
2. Значимость коэффициента корреляции
3. Сравнение средних

Постановка задачи

Имеем парные независимые наблюдения

$$(X_1, Y_1) \cdots (X_n, Y_n)$$

из некоторой генеральной совокупности

$r = \text{corr}(X, Y)$ – выборочный коэффициент корреляции.

Пусть $\rho = \text{corr}_{\text{pop}}(X, Y)$ – коэффициент корреляции в генеральной совокупности.

Утверждение

Если X и Y независимы, то $\rho = 0$.

Постановка задачи

Цель

На данных тестировать гипотезу

$$H_0 \ : \ \rho = 0$$

Альтернатива

$$H_1 \ : \ \rho \neq 0$$

Это называется проверка значимости коэффициента корреляции

Можно интерпретировать как гипотезу о некоррелируемости факторов.

Как тестировать? t-тест

Тестовая t-статистика:

$$t = \frac{r\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}}$$

Критическое значение: $t_{cr} = t(\alpha, df = n-2)$

Статистическое правило

- Отвергаем H_0 при $|t| > t_{cr}$, коэффициент корреляции значим
- Не отвергаем H_0 при $|t| < t_{cr}$, коэффициент корреляции незначим

Реализация

R: функция `cor.test(x,y)`

MS Excel: Анализа данных/корреляция

Постановка задачи

Имеем две независимые выборки (возможно разного объёма)

$$X_1, \ldots, X_n$$
$$Y_1, \ldots, Y_m$$

из генеральных совокупностей[2] с генеральными средними[3] a_X и a_Y.

[2] Нормально распределённых
[3] Математическими ожиданиями

Постановка задачи

Цель

На данных тестировать гипотезу

$$H_0 \ : \ a_X = a_Y$$

Альтернатива

$$H_1 \ : \ a_X \neq a_Y$$

Это тест сравнения средних независимых выборок или двухвыборочный t-тест.

Как тестировать? t-тест

Тестовая t-статистика:

$$t = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{s_X^2/n + s_Y^2/m}}$$

Критическое значение: $t_{cr} = t(\alpha, df)$

$$df = \frac{(s_X^2/n + s_Y^2/m)^2}{(s_X^2/n)^2/(n-1) + (s_Y^2/m)^2/(m-1)}$$

Статистическое правило

Отвергаем H_0 при $|t| > t_{cr}$, средние различаются значимо.

Реализация

R: функция `t.test(x,y)`

MS Excel: Анализа данных/сравнение средних