

ЧАСТЬ 3. Основы теории игр

Тема 10. Основные понятия теории игр

“По нашему мнению, теория игр представляет собой набор инструментов для построения моделей в экономической и политической теориях”

Э. Мулен

Игра - это идеализированная математическая модель коллективного поведения: несколько индивидуумов (участников, игроков) влияют на ситуацию (исход игры), причем их интересы (выигрыши при различных возможных ситуациях) различны. Антагонизм интересов рождает конфликт, в то время как совпадение интересов сводит игру к чистой координации. В большинстве игр, возникающих из анализа политических или социально-экономических ситуаций, интересы не являются ни строго антагонистическими, ни точно совпадающими. Продавец и покупатель согласны, что в их общих интересах договориться о продаже, конечно, при условии, что сделка выгодна обоим. Однако они энергично торгуются при выборе конкретной цены в пределах, определяющихся условиями взаимной выгоды сделки. Подобно этому рядовые избиратели; как правило, согласны отвести кандидатов, представляющих крайние точки зрения. Однако при избрании одного из двух кандидатов, предлагающих различные компромиссные решения, возникает ожесточенная борьба. Немного поразмыслив, читатель, наверное, согласится с тем, что большинство напоминающих игры ситуаций общественной жизни порождают как конфликтное, так и кооперативное поведение. Теория игр является полезным логическим аппаратом для анализа мотивов поведения участников в подобных ситуациях. Она располагает целым арсеналом формализованных сценариев поведения, начиная с некооперативного

поведения и до кооперативных соглашений с использованием взаимных угроз. Для каждой игры в нормальной форме использование различных кооперативных и некооперативных концепций равновесия, как правило, приводит к различным исходам. Их сравнение является основным принципом теоретико-игрового анализа и, по-видимому, источником строгих и вместе с тем содержательных рассуждений о побудительных мотивах поведения, вытекающих только из структуры игры в нормальной форме.

Предварительные понятия

В игре участвуют игроки. Множество игроков обозначается буквой N . В конкретной игре игроки могут иметь имена, однако в общетеоретическом плане игроков обычно нумеруют (первый игрок, второй игрок и т.д.). Таким образом, элементами множества N можно считать числа – номера игроков. Например, если в игре участвуют три игрока, то $N = \{1, 2, 3\}$.

Каждый игрок имеет множество действий (альтернатив), которые он может осуществлять. Если каждый из игроков осуществил какое-то действие, то говорят, что реализовался исход игры. Исходы имеют для игроков разную ценность. Рациональный игрок должен стремиться к достижению как можно более благоприятного для себя исхода. Однако никакой игрок не в состоянии обеспечить наилучший для себя исход только за счет собственных действий. Принимая решение о выборе действия, он должен учитывать интересы и возможные действия других игроков, влияющие на исход игры. В этом состоит отличие теоретико-игровой постановки задачи принятия решений от задачи оптимизации.

Индивидуальные предпочтения и индивидуальный выбор.

Начнем с двух предположений, на которых зиждется дальнейшая теория: *методологического индивидуализма и целесообразности действий*.

Первое предположение состоит в том, что экономические или социально-политические процессы и их исходы можно понимать в терминах индивидуальных предпочтений и выборов. Это может показаться странным для студентов, специализирующихся в политической науке, и привыкших оперировать групповыми категориями (классы и социальные группы, групповое сознание и т.п.). Невозможно отрицать, конечно, что социальное взаимодействие оказывает влияние на предпочтения и выборы людей. Но все же только люди (индивидуалы) могут предпочитать, разделять или отвергать цели, принимать решения, обучаться и т.п. Удобно говорить, конечно, что “общество предпочитает чистый воздух” или что “все фирмы максимизируют прибыль”. Но нельзя забывать, что в конечном итоге любая групповая акция опирается на индивидуальные предпочтения и действия людей.

Смысл второго предположения о целесообразности действий заключается в том, что теория игр не рассматривает никаких социальных аспектов поведения людей. Так, например, не рассматривается зависимость поведения игрока от его социальной принадлежности, образования, пола или уровня доходов. Единственной движущей силой, определяющей поведение игрока в понимании теории игр, является целесообразность.

Термины «рациональный игрок», «рациональное решение», «рациональный выбор» обычно употребляется для подитоживания предположения о целесообразности. Значения этих слов были предметом весьма оживленных дискуссий. Не вдаваясь в эти дискуссии, отметим лишь, что целесообразность не означает, вообще говоря, что игроки тщательно и осознанно перечисляют все свои альтернативные действия,

выявляют все вероятные и просто возможные последствия этих действий, оценивают вероятность каждого последствия и в точности распределяют свои предпочтения на множестве всех возможных последствий. Таким образом, мы не можем игнорировать привычки, инстинкты, простые правила и эвристики, помогающие упростить принятие сложных решений. Наоборот, эти аспекты принятия решений являются одним из наиболее важных направлений теоретических исследований. Предположение же о целесообразности выбора предполагает лишь, что после того как мы примем во внимание восприятие людьми ситуации, их ценностные ориентации и убеждения, мы сможем считать их действующими так, как если бы они выполняли все указанные выше построения и вычисления. Иными словами теория игр предполагает, что при построении модели игровой ситуации уже учтены все чисто человеческие черты игроков, и на долю идеализированных игроков досталась лишь задача рационального выбора, например: выбрать действие, приводящее к достижению максимального гарантированного дохода.

Некоторые фундаментальные понятия и определения

В политической науке рассматриваются ситуации, в которых действия, предпринимаемые одними людьми, зависят от действий, которые, как они думают, предпринимаются или будут предприниматься другими людьми. Таким образом, изучение политики - это изучение взаимозависимых решений. Однако, прежде чем мы перейдем к подобной проблеме необходимо разобраться с проблемой индивидуальных предпочтений и выборов.

На первом этапе мы осуществим это, полагая, что действия других людей - лишь статический компонент окружения данного игрока. Таким образом, после подобного упрощающего предположения у нас остается лишь три ключевых концепции: действия, исходы и состояние природы.

Под действием мы понимаем решение или выбор из некоторого числа альтернатив, который игрок делает в некотором специфическом контексте, и это именно то, что мы стараемся предсказать. Предположение о целесообразности означает, что действие игрока ориентировано на достижение определенного исхода или/и во избежание определенного исхода. Таким образом, между действием и исходом существует определенная причинно-следственная связь. Связь эта, однако, не прямая, а опосредованная (иначе мы не имели бы игровой ситуации). А именно, необходимо ввести еще концепцию состояния природы, под которым понимаются такие внешние условия, при которых исход “И” достигается посредством действия “Д”.

Действия

Пусть a_j обозначает одно из действий игрока (альтернативу с номером j), а A - множество всех допустимых действий:

$$A = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_j, \dots\}.$$

Предположим теперь, что игрок может выбирать одно и только одно действие из списка A . Тогда множество A является исчерпывающим или полным: в нем перечислены все возможности и одна из них должна быть реализована, а элементы множества A являются взаимоисключающими: игрок не может выбрать более одного действия. Когда, например, мы моделируем процесс голосования и изучаем вопрос, почему человек принимает (не принимает) участие в голосовании, мы используем множество A , состоящее только из двух элементов: $A = \{a_1 - \text{голосовать}, a_2 - \text{не голосовать}\}$. Даже на таком примитивном уровне описания множество A является полным и взаимоисключающим. Любой избиратель вынужден осуществить одно из действий и не в состоянии осуществить оба сразу.

Исходы

Поскольку мы рассматриваем действия как целесообразные, а значит целенаправленные, необходимо ввести понятие цели. Целью же может служить исход - объект, к которому стремится игрок. Обозначая исходы $R = \{r_1, r_2, \dots, r_k, \dots\}$, мы налагаем на них те же ограничения, что и на действия. Множество R должно быть полным, а его элементы взаимоисключающими.

Анализируя результаты парламентских выборов при двухпартийной системе, мы можем сформировать следующее множество исходов: $R = \{r_1$: победила партия 1, r_2 : победила партия 2, r_3 : ни одной из партий победить не удалось $\}$. Однако, если нас интересует не только факт победы, но и счет, то элемент множества исходов в общем виде будет выглядеть как “партия 1 набрала v_1 голосов, а партия 2 набрала v_2 ”. Если мы станем перечислять все подобные исходы (перебирая все мыслимые комбинации v_1 и v_2), то число их окажется очень большим, хотя все еще конечным. Но если мы рассматриваем игру, в которой игроки вносят некоторые суммы в кассу своей партии, и размер взносов ничем не ограничен, то число исходов становится просто бесконечным.

Бесконечные множества бывают счетными и несчетными. Если каждому элементу множества можно присвоить порядковый номер: 1, 2, 3, ... и т.д. , то множество считается счетным. Если же элементов во множестве так много, что перенумеровать их невозможно, то множество считается несчетным. Например, множество точек в отрезке конечной длины, или количество различных действительных чисел в диапазоне от 0 до 1 являются несчетными¹ множествами.

До сих пор мы предполагали множества действий и исходов счетными. Более того, во всех конкретных примерах эти множества были конечными.

¹ В математике такие множества называются множествами мощности континуум.

Сейчас настал подходящий момент, чтобы разрешить им быть несчетными. Часто бывает гораздо более удобным считать множество несчетным, вместо того, чтобы перечислять бесконечное (или просто очень большое) количество альтернатив. Так, например, вместо обозначений:

- a_0 : 0 рублей пожертвовано кандидату 1;
- a_1 : 1 рубль пожертвован кандидату 1;
- ... и т.д.

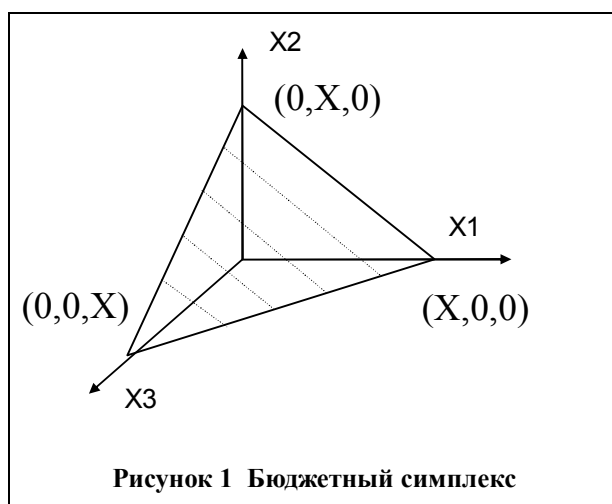
гораздо удобнее написать

$a \in R$ (читается: “элемент a принадлежит множеству R ”, или “ a содержится в R ”), где R - множество действительных чисел. Тогда a представляет из себя некоторое конкретное число и интерпретируется как: “ a рублей пожертвовано кандидату 1”.

К счастью для нас бесконечные и несчетные множества (в частности интервалы значений действительных чисел) имеют простую геометрическую интерпретацию и позволяют привлекать нашу геометрическую интуицию для интерпретации результатов.

Предположим, партийный казначей для проведения предвыборной кампании распределяет фиксированную сумму денег, скажем X , между тремя кандидатами.

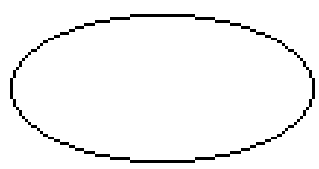
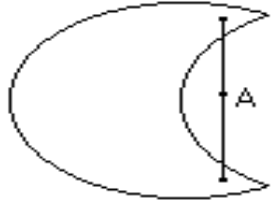
$$x_1 + x_2 + x_3 = X$$



Все мыслимые способы дележа представлены на рисунке 1 точками, составляющими треугольник, называемый бюджетным симплексом.

Бюджетный симплекс - ограниченное и замкнутое множество.

Кроме того, оно выпуклое. Выпуклым множеством называется такое, что если выбрать любые две точки, принадлежащие этому множеству и соединить их отрезком прямой, то весь отрезок тоже будет принадлежать множеству. Свойство выпуклости вполне понятно из следующих трех примеров:

		
а) выпуклое множество	б) строго выпуклое множество	в) невыпуклое множество: точка А находится вне его.

Итак, бюджетный симплекс - ограниченное, закрытое и выпуклое множество.

Состояние природы (среды)

Мы ввели понятия действий (альтернатив) и исходов. Этого, однако, недостаточно для полного описания процесса принятия решений. Дело в том, что неясно как действия связаны с исходами. Связь между действиями и исходами обеспечивается “состоянием природы”.

$$S = \{s_1, s_2, \dots, s_i, \dots\}$$

Пример: Выборы между двумя кандидатами. Альтернативы: за, против, воздержался.

$$S = \left\{ \begin{array}{l} s_1 : v_1 - v_2 < -1 \\ s_2 : v_1 - v_2 = -1 \\ s_3 : v_1 - v_2 = 0 \\ s_4 : v_1 - v_2 = +1 \\ s_5 : v_1 - v_2 > +1 \end{array} \right\}$$

Связь между действиями и исходами, опосредованная состояниями природы представлена в следующей таблице:

	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5
a_1 : голос за 1	r_2 : побеж- дает 2	r_3 : ничья	r_1 : побеж- дает 1	r_1 : побеж- дает 1	r_1 : побеж- дает 1
a_2 : голос за 2	r_2 : побеж- дает 2	r_2 : побеж- дает 2	r_2 : побеж- дает 2	r_3 : ничья	r_1 : побеж- дает 1
a_3 : воз- держался	r_2 : побеж- дает 2	r_2 : побеж- дает 2	r_3 : ничья	r_1 : побеж- дает 1	r_1 : побеж- дает 1

Если превалирует ситуация s_1 или s_5 , то от конкретного голосующего гражданина ничего не зависит: он может голосовать как угодно. Если же, однако, превалирует ситуация s_3 , т.е. голоса распределяются между кандидатами примерно поровну, то голос гражданина становится решающим: от него напрямую зависит исход.

Таким образом, информация о превалирующем состоянии среды оказывается чрезвычайно важной при выборе действия. Качество же этой информации может варьировать от полной определенности до полного отсутствия таковой. Простейшим случаем является принятие решения в условиях определенности, т.е. в ситуации, когда заведомо известно, к какому исходу приведет то или иное действие. Более сложным случаем является принятие решений в условиях риска. При отсутствии точной информации о состоянии природы осмысленность выбору может придать лишь приблизительная информация, а именно, в этом случае предполагается, что игрок может хотя бы оценивать вероятность того, что то или иное состояние природы окажется превалирующим.

В случае полной информации принятие решений не составляет труда. Если имеется хорошо определенный порядок предпочтений на множестве

исходов, то следует просто выбрать действие, приводящее к наиболее предпочтительному исходу.

Предпочтения

Слабое и сильное предпочтения. Будем писать $r_1^i \succ r_2^i$, если исход r_1 для игрока i по крайней мере не хуже чем r_2 . (слабое предпочтение)

Предположение 1 (полнота): Для любых двух исходов $r_1, r_2 \in R$ либо $r_1^i \succ r_2^i$ либо $r_1^i \prec r_2^i$.

Предположение 2 (транзитивность): Для любых трех исходов $r_1, r_2, r_3 \in R$ если $r_1^i \succ r_2^i$ и $r_2^i \succ r_3^i$, то $r_1^i \succ r_3^i$.

Индифферентность: исходы r_1 и r_2 одинаково предпочтительны $r_1^i \sim r_2^i$, если $r_1^i \succ r_2^i$ и $r_1^i \prec r_2^i$ одновременно.

Строгое (сильное) предпочтение означает наличие слабого предпочтения при отсутствии индифферентности:

$$r_1 \triangleright r_2 \Leftrightarrow \left(r_1^i \succ r_2^i \right) \cap \left(r_1^i \not\sim r_2^i \right).$$

Предположения о полноте (1) и транзитивности (2) не так просты и очевидны, как может показаться на первый взгляд.

Предположим, вы очень любите классическую музыку. Что вы предпочитаете: взбитые сливки с шоколадом или прелюдию Баха?

Предположим, я предпочитаю чай без сахара, но не могу отличить разницу в сладости, если она составляет одну крупинку сахара на стакан. Тогда получается следующее (цифры будут обозначать число крупинок сахара): $0 \sim 1, 1 \sim 2, 2 \sim 3, \dots, (n-1) \sim n \Rightarrow 0 \sim n$.

Но при достаточно большом числе n я безусловно отличу сладкий чай от несладкого. Так что транзитивности здесь нет. Благодаря таким

примерам часто рассматривается альтернативное предположение, согласно которому только строгое предпочтение считается транзитивным.

Функция полезности

Отношения индифферентности, слабого и сильного предпочтения, рассмотренные нами ранее, хороши для конечных множеств. Но для бесконечных множеств, таких как бюджетный симплекс, они становятся неудобными. В то же время, очевидна близость этих отношений к математическим отношениям $\{=, \geq, >\}$, выражающим отношения между числами. Было бы удобно использовать эту математические отношения для выражения отношения предпочтения между альтернативами или исходами. Для этого надо лишь ввести функцию, которая ставила бы в соответствие каждому исходу некоторое действительное число, причем так, что более предпочтительному исходу соответствовало бы большее число.

Такая функция называется функцией полезности (она вводится неоднозначно!). Функция полезности $u(r)$ определена на множестве исходов R и удовлетворяет следующему условию:

для любых $r_1, r_2 \in R$ $u(r_1) > u(r_2)$ тогда и только тогда, когда $r_1 \succ r_2$.

Пример: бюджетный симплекс. Исходом в данном случае является тройка $r = (x_1, x_2, x_3)$, соответствующая дележу денег между тремя кандидатами. Определим функции полезности для каждого из кандидатов следующим образом:

$$u_1(r) = x_1, \quad u_2(r) = x_2, \quad u_3(r) = x_3$$

Тогда для игрока 1 исход r предпочтительнее $\tilde{r}$, если $x_1 > \tilde{x}_1$.

Векторные исходы.

В реальной жизни исходы часто бывают многоплановыми, так что оценки лучше-хуже, более или менее предпочтительный оказываются к ним трудно применимыми. Пусть, например, Государственная Дума

принимает некоторый бюджетобразующий закон, в котором фиксируется распределение денег по нескольким позициям. Общество может благосклонно принять решение по одной позиции, но подвергнуть резкой критике решение по другой. Можно, разумеется, каким-то образом усреднить оценку законопроекта, пренебрегая возникающим при этом произволом (стандартного способа усреднения не существует), но можно поступить и по другому, рассматривая исход как вектор, состоящий из нескольких компонент - частичных исходов.

Пример: Варианты финансирования оборонных и социальных программ. Пусть в парламенте рассматривается вопрос о распределении бюджетных средств между министерством обороны и министерством социального обеспечения. Пусть x_1 – количество средств выделяемых на военные нужды, а x_2 – на социальные нужды. И пусть предельное количество средств, выделяемых по обеим статьям, не может превышать величины X . То есть:

$$(0.1) \quad x_1 + x_2 \leq X$$

Естественными функциями полезности будут для министерства обороны – x_1 , а для министерства социального обеспечения – x_2 . Рассмотрим в рамках этих предположений несколько альтернативных исходов. На рисунке ниже граница бюджетного симплекса представлена линией $x_1 + x_2 = X$. Допустимыми с точки зрения (0.1) исходами являются все точки, содержащиеся в треугольнике, образованном осями x_1 , x_2 и границей бюджетного симплекса.

Рассмотрим пару исходов r_1 и r_2 . С учетом функций полезности исходы индифферентны с точки зрения министерства социального обеспечения. Однако с точки зрения министерства обороны исход r_2 явно предпочтительнее.

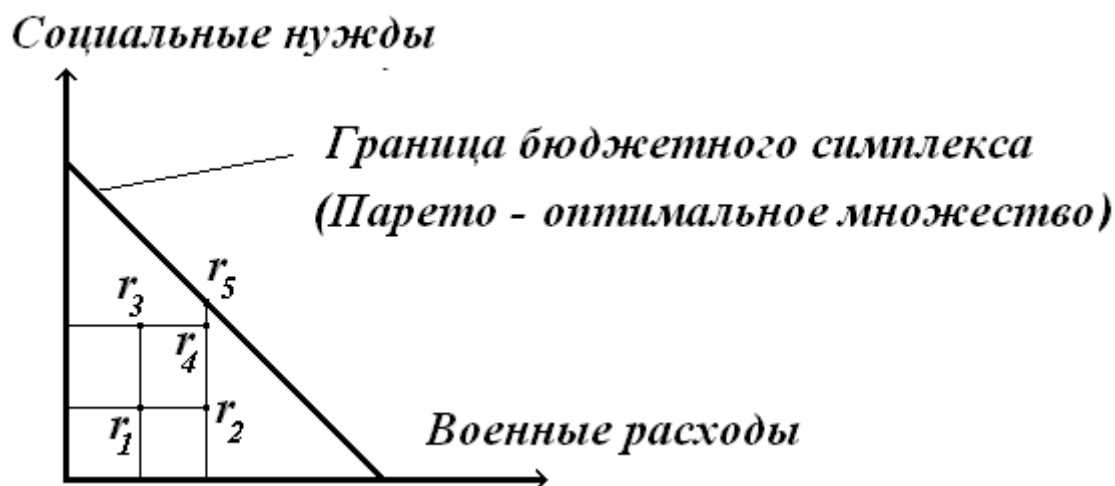


Рисунок 2. Векторные исходы.

Математически этот факт можно выразить следующим образом: $u_2(r_1) = u_2(r_2)$, $u_1(r_1) < u_1(r_2)$. Аналогично: $u_2(r_1) < u_2(r_3)$, $u_1(r_1) = u_1(r_3)$. Исход r_4 предпочтительнее, чем r_1 для обоих игроков: $u_{1|2}(r_4) > u_{1|2}(r_1)$. В подобных случаях говорят, что исходы r_2 и r_3 доминируют по Парето исход r_1 , а исход r_4 доминирует по Парето все выше перечисленные исходы. Если мы рассмотрим исход r_5 , находящийся на границе симплекса, то обнаружим, что найти доминирующий его исход невозможно. Действительно, мы находили доминирующие для r_1 исходы, двигаясь от этой точки либо вверх (r_3), либо вправо (r_2), либо в северо-восточном направлении (r_4). Ни одно из подобных движений в точке r_5 невозможно. Точки, подобные r_5 , называются **оптимальными по Парето**.

Формальное определение состоит в следующем.

Исход r доминирует по Парето исход q , если

$$\begin{cases} \forall i \in N & u_i(r) \geq u_i(q) \\ \exists i \in N & u_i(r) > u_i(q) \end{cases}$$

В записи этого определения использованы специальные значки, называемые кванторами всеобщности и существования. Значок $\forall$ читается «для любого», а значок $\exists$ читается «существует». Запись $\forall i \in N$ читается так: «для любого i , принадлежащего N ».

Исход g называется **оптимальным по Парето (Парето-оптимальным)**, если он не доминируем по Парето.

Разумеется, рациональные игроки не должны стремиться ни к каким иным исходам, кроме Парето-оптимальных. Проблема заключается в том, что Парето-оптимальных исходов много. В нашем примере их бесчисленное число: каждая точка прямой $x_1 + x_2 = X$ является Парето-оптимальной. Парламент должен выбрать одну из этих точек. Парламент – это орган коллективного принятия решений. Ситуация, когда игрок является не индивидуалом, а группой лиц, вполне стандартна для теории игр. Например, если игрок фирма, то решения принимает совет директоров. Если игрок – партия, то решения принимает партийный съезд. Среди членов Парламента, несомненно, будут депутаты, лоббирующие интересы военного ведомства, но будут и такие, которые будут активно поддерживать финансирование социальных программ. Налицо конфликт интересов. Какое решение будет оптимальным с точки зрения коллектива? Существует ли универсальный алгоритм, позволяющий учесть все индивидуальные предпочтения членов органа, принимающего решения, и вынести справедливое коллективное решение?

Индивидуальные предпочтения и групповой выбор.

Прежде, чем мы сможем разрабатывать теорию политики, мы должны уметь формально описывать индивидуальные предпочтения. Индивидуалы формируют политику, независимо от того, как выглядит общественный строй или политическая система. Движения, партии, нации, законодательные и совещательные органы состоят из личностей, которые формируют характер этих институтов. Даже процедурные нормы, традиции и конституции, которые определяют и регулируют действия людей внутри коллективов, и те являются продуктом индивидуальных решений. Однако, изучать политику, сосредоточиваясь исключительно на индивидуальном

выборе, невозможно, потому что люди в политике действуют в окружении, созданном из действий других людей, и эти частные действия находятся в постоянном взаимодействии и создают условия друг для друга. Вообще говоря, "состояние природы", упоминавшееся ранее, не является ни божеством, ни каким-то легкомысленным созданием, но массой других людей, преследующих каждый свои цели. Теория, которая не учитывает эту действительность не может претендовать на звание научной.

Однако, оказывается, что весьма трудно да и просто невозможно вывести коллективные, социальные предпочтения и решения напрямую из индивидуальных предпочтений. Огромную, а зачастую и решающую, роль в таком выводе играют социальные институты, выполняющие роль посредников между социальными процессами и индивидуальными предпочтениями. Например, с демократией ассоциируются такие институты, как голосования, выборы, референдумы и пр., которые призваны агрегировать индивидуальные предпочтения, и затем, за счет своей внутренней структуры преобразовывать их в реальные политические явления: в специфическое распределение ресурсов, в победу каких-то кандидатов или даже в изменение самих институтов.

Классический пример, иллюстрирующий роль институтов в формировании коллективной оценки ситуации, описан у Плиния. Согласно этому описанию

консул Африканиус Декстер был найден убитым, и было неясно погиб ли он от своей собственной руки или от рук своих вольноотпущенников. Когда дело рассматривалось Римским Сенатом, Плиний хотел оправдать их (альтернатива x); другой сенатор предложил сослать их на остров (альтернатива y); а третий - предать их смерти (z).

Можно предположить, что существовало три группы сенаторов, отличающихся своими предпочтениями на множестве из трех упомянутых альтернатив.

1. Сенаторы, считающие, как и Плиний, что вольноотпущенники невиновны. В этом случае $x \succ y \succ z$.
2. Те, кто в силу неопределенности ситуации предпочитают ссылку, но менее всего хотели бы смертной казни: $y \succ x \succ z$.
3. Те, кто уверен в виновности вольноотпущенников и желает их смерти: $z \succ y \succ x$.

Первое, и как мы увидим, решающее решение, принятое Сенатом - выбор подходящей процедуры для определения судьбы вольноотпущенников. Широко известной и употребительной в данном случае является бинарная процедура, при которой решение является многоступенчатым, но всякий раз выбор делается из двух альтернатив. Если бы сначала были проголосованы два класса альтернатив: виновны (альтернативы y и z) или невиновны (альтернатива x), тогда, вероятно, прошло бы решение “виновны”, т.к. первая группа сенаторов была лишь немногим больше, чем каждая из групп 2 и 3. При последующем голосовании о суровости наказания победила бы, вероятно, альтернатива y , т.к. к сенаторам группы 2 присоединились бы сенаторы группы 1, для которых y предпочтительнее z . Окончательным решением была бы ссылка.

Плиний, однако, настоял на использовании правила простого большинства, при котором все три альтернативы ставятся на голосование одновременно, и побеждает та из них, которая наберет больше голосов. Это и привело к победе желательной для Плиния альтернативы x , т.е. к оправданию.

Если в примере с Плинием попарно подвергнуть все альтернативы голосованию на большинство голосов, то победит альтернатива y , а

последнее место займет z . В этом смысле напрашивается вывод, что социальные предпочтения выражаются транзитивным отношением: $y \succ x \succ z$. Вопрос, таким образом, заключается в том, чтобы найти подходящий механизм (институт), преобразующий транзитивные индивидуальные предпочтения в транзитивные социальные предпочтения.

Мир, однако, устроен не так просто. Теорема Эрроу показывает, что даже если все индивидуальные предпочтения транзитивны, то нет никакой гарантии, что социальные предпочтения, выведенные из индивидуальных при помощи какого-либо механизма (института) будут тоже транзитивны. В этом смысле группы людей фундаментальным образом отличаются от отдельных личностей. Можно привести много примеров манипуляций результатами голосований (социальным выбором) в зависимости от механизма агрегирования голосов. Более того, в некоторых случаях манипулирование правилом простого большинства может привести к *любому исходу*. Наконец, манипулирование исходами возможно путем намеренного искажения любым из ЛПР его собственных предпочтений.

Теорема Эрроу.

Предположим три человека должны осуществить коллективный выбор из трех альтернатив: x , y , z . Пусть их индивидуальные предпочтения заданы следующей таблицей :

первый	$x \succ z \succ y$
второй	$y \succ x \succ z$
третий	$z \succ y \succ x$

Пусть каждая пара альтернатив предлагается для мажоритарного голосования. Результат голосования будем считать социальным предпочтением. Тогда: $x \succ z \succ y \succ x$. Получается цикл, известный как парадокс Кондорсе.

Нарушение в данном случае транзитивности системы коллективных предпочтений надо трактовать так, что правило простого большинства не может служить безукоризненным основанием для формирования групповой системы предпочтений.

В 1951 г. К. Эрроу (K. Arrow) провел анализ возможных правил принятия решений в группах и пришел к важным выводам (позднее за эти исследования он получил Нобелевскую премию). Изложим его выводы.

Перечислим сначала некоторые возможные правила принятия решений в группе:

- а) простое большинство;
- б) квалифицированное большинство, например две трети;
- в) консенсус, т.е. полное согласие всех членов группы;
- г) обычай;
- д) идеологические соображения;
- е) религиозные соображения;
- ж) авторитет, т.е. добровольное присоединение к мнению одного из членов группы;
- з) диктатура в какой-нибудь форме одного из членов группы или какой-нибудь подгруппы;

Теорема Эрроу. Кроме транзитивности, групповая система предпочтений должна удовлетворять и другому известному требованию к системе предпочтений — полноте (или совершенности), т.е. для любых двух альтернатив группа должна указать лучшую. Кроме этих двух естественных и уже известных свойств, система предпочтений группы должна удовлетворять еще двум требованиям, которые проистекают уже из ее природы.

Аксиома единогласия. Если все члены группы считают, что $x \succ y$, то и группа должна так считать.

Аксиома независимости. При сравнении x и y группа забывает о других альтернативах, т.е. важно лишь знать, кто из членов группы считает, что $x \succ y$, а кто — наоборот ("когда обсуждают достоинства Пьера и Поля, то достоинства Жана при этом абсолютно ни причем" — пишет И. Экланд, один из известных исследователей в области математической экономики). Эта аксиома распространяется и на большее число альтернатив.

Эрроу установил, что если групповое правило принятия решений удовлетворяет требованиям полноты, транзитивности, единогласия и независимости, то это — диктатура. Следовательно, если считать диктатуру неприемлемой, то теореме Эрроу надо считать теоремой о несуществовании демократической процедуры принятия решений в группе. Понятно поэтому, что теорема Эрроу в советское время была, в сущности, под запретом.

Но можно придать теореме Эрроу и некоторый другой смысл. Она утверждает, что не существует демократической процедуры принятия решений, а если диктатура отвергается, то, значит, не существует никакого группового правила принятия решений, т.е. не существует никакого автоматического правила принятия решений в группе, учитывающего предпочтение членов группы. Следовательно, выработка группового решения не происходит автоматически, требуется обсуждение, согласование, обмен мнениями, возможно и изменение мнения некоторых членов группы и т.д. Другими словами, для выработки группового решения члены группы должны сотрудничать друг с другом. Выработка группового решения – это творческий процесс.

Понятие вероятности

Если долгое время бросать монетку и следить за результатами этих испытаний, то можно прийти к следующим выводам. В результате

испытания может произойти одно из двух событий: либо выпадает «орел» либо «решка», причем количества «орлов» и «решек» будут примерно равны. Эти два события составляют полную систему: какое-либо одно событие из перечисленных двух обязано произойти. Объединение событий, составляющих полную систему, является достоверным событием. Событие: в результате бросания монетки выпадет либо «орел» либо «решка», является достоверным событием. Вероятность достоверного события принимается за единицу (или 100%). Выпадение «орла» и «решки» являются несовместными (взаимоисключающими) событиями. Для несовместных событий справедливо правило сложения вероятностей: Вероятность объединения несовместных событий равна сумме их индивидуальных вероятностей. Пусть вероятность события A обозначается как $P(A)$, тогда для несовместных событий A и B :

$$(0.2) \quad P\{A \cup B\} = P(A) + P(B), \quad A \cap B = \emptyset$$

То есть вероятность того, что произойдет либо A , либо B равна сумме вероятностей наступления событий A и B . При бросании монетки:

$$P(\text{орел}) + P(\text{решка}) = 1$$

Если монета является симметричной и однородной (центр тяжести не смещен), то нет никаких оснований считать, что одна сторона монеты будет выпадать чаще, чем другая. Поэтому теоретически считают, что

$$(0.3) \quad P(\text{орел}) = P(\text{решка}) = \frac{1}{2}$$

Содержательный смысл вероятности — относительная частота наступления события, при безграничном увеличении числа испытаний.

Помимо теоремы сложения вероятностей (0.2) имеет место и теорема умножения вероятностей. Пусть монета бросается два раза. Понятно, что вероятность выпадения орла при втором бросании никак не зависит от

того, какой стороной монета выпала при первом бросании. Пусть выпадение орла при первом бросании – событие A , а выпадение орла при втором бросании – событие B . Для независимых событий справедлива следующая теорема: вероятность наступления обоих событий равна произведению вероятностей наступления каждого из событий.

$$(0.4) \quad P(A \cap B) = P(AB) = P(A) \cdot P(B)$$

По теореме (0.4) вероятность того, что при двух бросаниях монеты выпадут два орла равна $P(AB) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

По классической теории вероятностей **вероятность события A , могущего возникнуть в результате испытания равна числу возможных исходов испытания, благоприятствующих наступлению события A , деленному на общее число возможных исходов испытания.** Пусть, например, имеется три лотерейных билета, один из которых выигрышный. Покупатель выбирает наудачу один из билетов. Какова вероятность выбора выигрышного билета? Общее число исходов испытания – 3. Число исходов, при которых покупатель приобретает выигрышный билет, – 1. Значит, искомая вероятность равна $1/3$. Если имеется десять лотерейных билетов, три из которых выигрышные, то соответствующая вероятность равна $0,3$.

Важную роль в теории случайных процессов играет понятие математического ожидания (или среднего значения) случайной величины. Предположим, некто предложил вам следующую игру. Бросается игральная кость и, если выпала шестерка, то вы выигрываете 5 рублей. Если же выпало иное количество очков, то вы проигрываете 1 рубль. Имеет ли смысл играть в такую игру?

Если игра разыгрывается один раз, то предсказать ее исход невозможно. Если же она повторяется много раз, то ваши выигрыши будут чередоваться с проигрышами, и имеет смысл говорить о среднем

выигрыше в расчете за одну партию игры. Математическое ожидание дает средний выигрыш в расчете за одну партию, если число партий стремиться к бесконечности. Если число партий конечно, но достаточно велико, то средний выигрыш может лишь незначительно отличаться от математического ожидания, которое в этом случае является хорошим ориентиром для принятия решения. Рассчитаем математическое ожидание выигрыша для нашей игры. Для расчета строится таблица, называемая законом распределения случайной величины. В верхнем ее ряду выписываются значения, которые может принимать случайная величина, а в нижнем – соответствующие им вероятности. В нашем случае значению выигрыша 5 будет соответствовать вероятность $1/6$, так как шестерка выпадает именно с этой вероятностью. Все остальные исходы имеют вероятность $5/6$.

Значения выигрыша (X)	5	-1
Вероятности	$1/6$	$5/6$

Значение математического ожидания $M(X)$ рассчитывается как скалярное произведение вектора значений случайной величины (первая строка) на вектор вероятностей (вторая строка). Иными словами каждое значение случайной величины умножается на соответствующую вероятность (по вертикали), а затем все произведения складываются (по горизонтали).

$$M(X) = 5 \cdot \frac{1}{6} + (-1) \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{6} - \frac{5}{6} = 0$$

Таким образом, в рассматриваемом примере выигрыши и проигрыши в среднем уравниваются друг друга и математическое ожидание равно нулю.

Рассмотрим еще один пример. Пусть игра теперь имеет следующие правила. Бросаются две игральные кости. Если выпадают две шестерки, то игрок выигрывает 10 рублей; если одна шестерка, то 5 рублей; если ни одной шестерки, то он проигрывает 1 рубль. Является ли эта игра выгодной для игрока?

		Выигрыши	
		Вторая кость	
		6	1-5
Первая кость	6	10	5
	1-5	5	-1

		Вероятности	
		Вторая кость	
		6	1-5
Первая кость	6	$\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6}$	$\frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}$
	1-5	$\frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}$	$\frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6}$

Результаты бросания костей есть независимые события, поэтому работает теорема произведения вероятностей. Например, вероятность выпадения двух шестерок есть вероятность выпадения шестерки на первой кости ($1/6$) умноженная на вероятность выпадения шестерки на второй кости ($1/6$). Остальные вероятности вычисляются аналогично. Для подсчета математического ожидания нужно составить сумму произведений выигрышей, записанных в первой матрице, на соответствующие вероятности во второй:

$$M(X) = 10 \cdot \frac{1}{36} + 2 \cdot 5 \cdot \frac{5}{36} - \frac{25}{36} = \frac{35}{36}$$

Таким образом, по новым правилам игрок будет выигрывать в среднем по $35/36$ за партию, то есть игра выгодна для него.

Equation Section (Next) Тема 11. Игры с противоположными интересами

В теории игр наиболее хорошо разработана математическая теория игр двух лиц с нулевой суммой. Еще эти игры называются антагонистическими, поскольку интересы игроков прямо противоположны. Если множества действий игроков конечны, то игру удобно представлять в матричной форме. Действия каждого игрока нумеруются. После чего составляется матрица игры, в которой номер строки совпадает с номером действия первого игрока, а номер столбца – с номером действия второго. Элемент матрицы, стоящий на пересечении i -ой строки и j -го столбца, представляет собой **функцию полезности первого игрока** или, попросту, его выигрыш в случае выбора игроками действий i и j , соответственно. Выигрыш второго игрока в игре с нулевой суммой всегда противоположен по знаку выигрышу первого игрока: $u_2(i, j) = -u_1(i, j)$. В матрице он не указывается, но его легко получить, заменив знак у элемента матрицы. Сумма выигрышей игроков всегда равна нулю, откуда и происходит название этого класса игр. Поскольку функции полезности игроков отличаются только знаком, то удобно пользоваться только одной из них. Для этого принято использовать функцию полезности первого игрока. Ее называют функцией выигрыша и обозначают $v(i, j)$:

$$v(i, j) = u_1(i, j) = -u_2(i, j)$$

В матричной игре с матрицей $A = (a_{ij})$ значения функции выигрыша равны элементам матрицы: $v(i, j) = a_{ij}$

Пример 1. Игра в чет/нечет. Игроки договариваются о следующих правилах игры. Каждый из них тайно загадывает натуральное число. Затем числа предъявляются и складываются. Если сумма оказывается четной, то

второй игрок платит первому единицу денег, а если нечетной, то – наоборот. Понятно, что для каждого из игроков несущественно, какое именно число загадывать, существенно лишь то, является оно четным или нечетным. Поэтому для каждого из игроков можно ограничиться списком лишь из двух действий: четное или нечетное число. Матрица этой игры выглядит следующим образом:

		Второй игрок	
		чет	нечет
Первый игрок	чет	1	-1
	нечет	-1	1

В приведенном примере элемент матрицы игры a_{11} равен единице. Это означает, что при выборе действий (1,1) первый игрок выигрывает единицу, а второй игрок проигрывает единицу.

Естественно, что каждый из игроков не хочет проигрывать, а стремится к тому, чтобы выиграть как можно больше. Главной задачей теории игр является выработка рекомендаций по выбору действий игроком, приводящих к наилучшему для него результату. Существенными моментами для выработки таких рекомендаций являются информированность игроков и количество повторений игры. Если игра чет/нечет разыгрывается однократно, то почти никаких рекомендаций дать невозможно. Если же она многократно повторяется, то появляется возможность говорить о стратегии поведения в такой игре. Есть два класса стратегий. Первый класс – это выбор действия по какому-то фиксированному правилу. Например, устойчивое повторение одного и того же действия называется **чистой стратегией**. Чистая стратегия в игре чет/нечет неудачна. Противник быстро обнаружит повторяемость действий и, сделав соответствующие выводы, начнет устойчиво выигрывать. Можно

использовать какое-либо иное фиксированное правило, например, такое. В первой итерации игры выбирается чет, в следующих двух – нечет, затем опять чет и т.д. Подобная стратегия выявляется медленнее, но при достаточно большом числе итераций выявляется и она, что приводит к результату, аналогичному применению чистой стратегии. Второй класс стратегий – это **смешанные стратегии**. Стратегия называется смешанной, если выбор действия происходит по случайному закону с известным распределением вероятностей. Например, первый игрок может перед выбором действия бросать монетку и выбирать действие в зависимости от результата этого испытания. Теория показывает, что подобная стратегия обеспечивает игроку в среднем нулевой результат, а большего результата он себе гарантировать не может. В общем случае смешанная стратегия – это вектор вероятностей: $(p_1, p_2, \dots, p_n)$, где n – число чистых стратегий (или число действий игрока), а p_i – вероятность выбора соответствующего действия ($\sum_{i=1}^n p_i = 1$).

Пример 2. Важное место в теории игр занимает понятие осторожной стратегии. Пусть имеется игра, определяемая матрицей:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \min_j (a_{ij}) \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \max_i \min_j (a_{ij}) = 1$$

Предположим, что первый игрок решил применить одну из чистых стратегий. Какая из чистых стратегий лучше? Для каждой из чистых стратегий (для каждой строки матрицы) определим наихудший исход для первого игрока и запишем полученное число в отдельном столбце справа от матрицы. Для этого в каждой строке надо выбрать минимальное число. В первой строке наихудшим исходом для первого игрока будет проигрыш единицы. Во второй – проигрыш двух единиц. В третьей – выигрыш одной

единицы. Полученный нами столбец чисел – это столбец гарантированных результатов первого игрока в случае применения соответствующих чистых стратегий. Действительно, если первый игрок применяет первую стратегию, то меньше, чем (-1) он получить не может, это его гарантированный результат. Затем из полученных чисел выбираем наибольшее, то есть выбираем «лучшее из худших». В результате получаем единицу. Эта единица представляет собой **максимальный гарантированный результат первого игрока**. В общем случае его обозначают:

$$(1.1) \quad \underline{v} = \max_i \min_j (a_{ij})$$

и называют **нижним значением игры** или **максимином**. Соответствующая этому результату третья стратегия называется максиминной стратегией. Если первый игрок исповедует осторожную линию поведения (избегает риска) то максиминная стратегия является для него наилучшей из чистых стратегий.

Рассмотрим ту же игру с точки зрения второго игрока. Найдем наихудшие для него результаты при выборе тех или иных чистых стратегий. Напомним, что элементы матрицы – суть выигрыши первого игрока, но, с другой стороны, это проигрыши второго. Следовательно, наихудший результат (максимальный проигрыш) второго игрока при использовании им стратегии j соответствует максимальному числу в j -ом столбце матрицы. Поэтому будем искать максимальное значение в каждом из столбцов матрицы.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \min_j \max_i (a_{ij}) = 1$$

$$(3 \quad 2 \quad 1) \Leftarrow \max_i (a_{ij})$$

Выбирая тот столбец матрицы, который соответствует минимальному из максимальных проигрышей второй игрок гарантирует себе проигрыш, не превышающий величины:

$$(1.2) \quad \bar{v} = \min_j \max_i (a_{ij})$$

Величина (1.2) называется **верхним значением игры** или **минимаксом**. Соответствующая ей стратегия второго игрока – минимаксной стратегией. В нашем примере получилось, что максимин равен минимаксу, или что нижнее и верхнее значение игры совпали. В этом случае говорят, что игра имеет цену, причем **цена игры** равна максимину (или минимаксу). Цена игры в нашем примере равна единице.

Игра из примера 1 не имеет цены. Для нее справедливо:

$$(1.3) \quad \underline{v} = \max_i \min_j (a_{ij}) = -1, \quad \bar{v} = \min_j \max_i (a_{ij}) = 1$$

В общем случае справедливо следующее утверждение:

Лемма. В любой матричной игре с конечной матрицей $m \times n$

$$\underline{v} \leq \bar{v}$$

Доказательство:

Обозначим: $I = \{1, 2, \dots, m\}$, $J = \{1, 2, \dots, n\}$, $i \in I$, $j \in J$. Пусть i произвольная стратегия первого игрока. Тогда:

$$v(i, j) \leq \max_j v(i, j)$$

Беря минимум от обеих частей неравенства, получаем:

$$(1.4) \quad \min_j v(i, j) \leq \min_j \max_i v(i, j)$$

Теперь заметим, что в правой части неравенства (1.4) стоит константа, а i выбиралось произвольно. Поэтому выполняется равенство:

$$(1.5) \quad \max_i \min_j v(i, j) \leq \min_j \max_i v(i, j)$$

что доказывает лемму.

Вернемся к результату (1.3). Нижнее значение игры является наиболее пессимистическим прогнозом для первого игрока – это среднее значение его выигрыша в обстановке, когда он все время проигрывает. Верхнее значение, наоборот, наиболее оптимистический прогноз его выигрыша. Реальное среднее значение игры будет лежать где-то между нижним и верхним значениями. Не существует, однако, никакой чистой стратегии, которая гарантировала бы одному из игроков этот промежуточный результат. В этом смысле в игре чет/нечет не существует оптимальной чистой стратегии.

В антагонистической игре естественно считать оптимальным такой исход, при котором ни одному из игроков невыгодно от него отклоняться. Подобный исход (x^*, y^*) называется ситуацией равновесия, а принцип оптимальности, основанный на отыскании ситуации равновесия, – принципом равновесия.

Определение. В матричной игре с матрицей $A = (a_{ij})$ размерности $m \times n$ исход $a_{i^*j^*}$ является ситуацией равновесия или седловой точкой, если

$$(1.6) \quad a_{ij^*} \leq a_{i^*j^*} \leq a_{i^*j} \quad \forall \quad 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$$

В седловой точке элемент матрицы $a_{i^*j^*}$ является одновременно минимумом в своей строке и максимумом в своем столбце. В игре из примера 2 элемент a_{33} является седловой точкой. Оптимальными в этой игре являются третьи стратегии для обоих игроков. Если первый игрок отклоняется от третьей стратегии, то он начинает выигрывать меньше, чем a_{33} . Если второй игрок отклоняется от третьей стратегии, то он начинает проигрывать больше, чем a_{33} . Таким образом, для обоих игроков нет ничего лучшего, чем последовательно придерживаться третьей стратегии.

Мы готовы сформулировать следующий принцип оптимального поведения: если в матричной игре имеется седловая точка, то оптимальным

является выбор стратегии, соответствующей седловой точке. Мешает нам в этом только одна неясность: что будет, если в игре окажется более одной седловой точки?

Теорема. Пусть $(i_1^*, j_1^*), (i_2^*, j_2^*)$ две произвольные седловые точки в матричной игре. Тогда:

$$(1.7) \quad v(i_1^*, j_1^*) = v(i_2^*, j_2^*), \quad v(i_1^*, j_2^*) = v(i_2^*, j_1^*)$$

Доказательство. Из определения ситуации равновесия имеем:

$$(1.8) \quad v(i, j_1^*) \leq v(i_1^*, j_1^*) \leq v(i_1^*, j) \quad \forall i \in I, \quad \forall j \in J$$

$$(1.9) \quad v(i, j_2^*) \leq v(i_2^*, j_2^*) \leq v(i_2^*, j) \quad \forall i \in I, \quad \forall j \in J$$

Подставим в левую часть неравенства (1.8) i_2^* , а в правую - j_2^* , в левую часть неравенства (1.9) - i_1^* , в правую - j_1^* . Тогда получим:

$$v(i_2^*, j_1^*) \leq v(i_1^*, j_1^*) \leq v(i_1^*, j_2^*) \leq v(i_2^*, j_2^*) \leq v(i_2^*, j_1^*)$$

Откуда следует равенство:

$$v(i_2^*, j_1^*) = v(i_1^*, j_1^*) = v(i_1^*, j_2^*) = v(i_2^*, j_2^*)$$

Из теоремы следует, что функция выигрыша принимает одно и то же значение во всех ситуациях равновесия. Именно поэтому число $v(i^*, j^*)$ называется ценой игры. А стратегии i^*, j^* , соответствующие любой из седловых точек, называются оптимальными стратегиями игроков 1 и 2, соответственно. В силу (1.7) все оптимальные стратегии игрока взаимозаменяемы.

Оптимальность поведения игроков не изменится, если в игре множества стратегий остаются прежними, а функция выигрыша умножается на положительную константу (или к ней прибавляется постоянное число).

Теорема. Для существования в матричной игре $(m \times n)$ седловой точки (i^*, j^*) необходимо и достаточно, чтобы максимин был равен минимаксу:

$$(1.10) \quad \max_i \min_j a_{ij} = \min_j \max_i a_{ij}$$

Доказательство. Необходимость. Если (i^*, j^*) – седловая точка, то, согласно (1.6) :

$$a_{ij^*} \leq a_{i^*j^*} \leq a_{i^*j} \quad \forall \quad 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$$

Поэтому

$$(1.11) \quad \max_i a_{ij^*} \leq a_{i^*j^*}$$

Вместе с тем имеем:

$$(1.12) \quad \min_j \max_i a_{ij} \leq \max_i a_{ij^*}$$

Из (1.11) и (1.12) получаем:

$$(1.13) \quad \min_j \max_i a_{ij} \leq a_{i^*j^*}$$

Рассуждая аналогично, приходим к равенствам:

$$(1.14) \quad a_{i^*j^*} \leq \min_j a_{i^*j} \leq \max_i \min_j a_{ij}$$

Таким образом,

$$\min_j \max_i a_{ij} \leq \max_i \min_j a_{ij}$$

С другой стороны, всегда выполняется обратное неравенство (1.5), поэтому справедливым оказывается (1.10).

Достаточность. Пусть справедливо (1.10). Докажем наличие седловой точки. Имеем:

$$(1.15) \quad a_{i^*j^*} \geq \min_j a_{i^*j} = \max_i \min_j a_{ij}$$

$$(1.16) \quad a_{i^*j^*} \leq \max_i a_{ij^*} = \min_j \max_i a_{ij}$$

Согласно равенству (1.10), неравенства (1.15) и (1.16) превращаются в равенства. После чего имеем:

$$\begin{aligned} a_{i^*j^*} &= \min_j a_{i^*j} \leq a_{i^*j} \\ a_{i^*j^*} &= \max_i a_{ij^*} \geq a_{ij^*} \end{aligned}$$

Теорема доказана. Попутно доказано, что общее значение максимина и минимакса равно цене игры $v = a_{i^*j^*}$.

Смешанное расширение игры

Рассмотрим матричную игру G . Если в ней существует ситуация равновесия, то минимакс равен максимину. Причем каждый из игроков может безбоязненно сообщить другому игроку информацию о своей оптимальной стратегии. Его соперник не сможет извлечь из этой информации никакой дополнительной выгоды. Теперь предположим, что в игре G нет ситуации равновесия. Тогда:

$$(1.17) \quad \min_j \max_i v(i, j) - \max_i \min_j v(i, j) > 0$$

В этом случае минимаксная и максиминная стратегии не являются устойчивыми. Игроки могут иметь стимулы к отклонению от своих осторожных стратегий, связанные с возможностью получения большего выигрыша, но и с риском проигрыша, то есть получения выигрыша меньшего, чем при применении осторожной стратегии. При применении рискованных стратегий передача информации о них противнику имеет пагубные последствия: игрок автоматически получает выигрыш меньший, чем при применении осторожной стратегии.

Пример 3. Пусть матрица игры имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Для такой матрицы $\max_i \min_j (a_{ij}) = 1$, $\min_j \max_i (a_{ij}) = 3$, т.е. ситуации равновесия не существует. Осторожными стратегиями игроков являются $i^*=1$, $j^*=2$. Пусть игрок 2 придерживается стратегии $j^*=2$, а игрок 1 выберет стратегию $i=2$. тогда последний получит выигрыш 3, что на две единицы больше, чем максимин. Если, однако, игрок 2 догадается о планах игрока 1, он сменит свою стратегию на $j=1$, и тогда первый получит выигрыш 0, то есть меньше своего максимина. Аналогичные рассуждения можно провести и для второго игрока. В целом можно сделать вывод, что применение авантюрной стратегии может в отдельной партии игры принести результат больший, чем гарантированный, но ее применение связано с риском. Возникает вопрос, нельзя ли скомбинировать надежную осторожную стратегию с авантюрной таким образом, чтобы увеличить свой средний выигрыш? По существу вопрос стоит о том, как разделить между игроками выигрыш (1.17)?

Оказывается, что разумным решением является применение смешанной стратегии, то есть случайный выбор чистых стратегий. Напомним, что стратегия игрока 1 называется смешанной, если выбор i -ой строки производится им с некоторой вероятностью p_i . Такую стратегию можно отождествить с распределением вероятностей $P = (p_1, \dots, p_m)$ на множестве строк. Предположим, что первый игрок имеет m чистых стратегий, а второй – n чистых стратегий. Тогда их смешанные стратегии – это вероятностные вектора:

$$(1.18) \quad \begin{aligned} X &= (x_1, \dots, x_m), \quad \sum_i x_i = 1 \\ Y &= (y_1, \dots, y_n), \quad \sum_j y_j = 1 \end{aligned}$$

Рассмотрим две возможные смешанные стратегии первого игрока из примера 3: $X_1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $X_2 = \left(\frac{3}{7}, \frac{4}{7}\right)$. Эти стратегии отличаются распределениями вероятностей между чистыми стратегиями. Если в

первом случае строки матрицы выбираются игроком с равными вероятностями, то во втором случае – с разными. Когда мы говорим о смешанной стратегии, то имеем ввиду под случайным выбором не выбор «наобум», а выбор, основанный на работе случайного механизма, обеспечивающего нужное нам распределение вероятностей. Так для реализации первой из смешанных стратегий хорошо подходит подбрасывание монетки. Игрок выбирает первую строку или вторую в зависимости от того, как выпадет монетка. В среднем игрок будет одинаково часто выбирать как первую строку, так и вторую, однако выбор на конкретной итерации игры не подчинен никакому фиксированному правилу и обладает максимальной степенью скрытности: до реализации случайного механизма он неизвестен даже самому первому игроку. Для реализации второй смешанной стратегии хорошо подходит механизм жеребьевки. Игрок берет семь одинаковых бумажек, пометив три из них крестиком, и бросает в шапку. Затем, наудачу, извлекает одну из них. Согласно классической теории вероятностей он вытащит бумажку с крестиком с вероятностью $3/7$, а чистую бумажку – с вероятностью $4/7$. Подобный механизм жеребьевки способен реализовывать любые рациональные вероятности.

Пусть игроки придерживаются смешанных стратегий (1.18). Тогда выигрыш первого игрока на отдельно взятой итерации игры является случайной величиной: $v(X, Y)$. Поскольку игроки выбирают стратегии независимо друг от друга, то, согласно теореме умножения вероятностей, вероятность выбора исхода (i, j) с выигрышем a_{ij} равна произведению вероятностей $x_i y_j$. Тогда закон распределения случайной величины $v(X, Y)$ задан следующей таблицей (в верхней строке пишем выигрыши, а в нижней соответствующие вероятности):

a_{11}	a_{12}	$\dots$	a_{ij}	$\dots$	a_{mn}
$x_1 y_1$	$x_1 y_2$	$\dots$	$x_i y_j$	$\dots$	$x_m y_n$

Пусть теперь игра разыгрывается бесконечно долго. Тогда средний выигрыш в такой игре равен математическому ожиданию величины $v(X, Y)$.

$$(1.19) \quad M(v(X, Y)) = \sum_i \sum_j a_{ij} x_i y_j$$

При конечном, но достаточно большом числе итераций игры средний выигрыш будет незначительно отличаться от величины (1.19).

Пример 4. Рассчитаем средний выигрыш (1.19) для игры из примера 3 при использовании игроками следующих стратегий:

$X = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$, $Y = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Матрица выигрышей и матрица вероятностей выглядят следующим образом:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

Составим сумму:

$$(1.20) \quad M(v(X, Y)) = 5 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} = 2,5$$

Таким образом, средний выигрыш (1.20) имеет промежуточное значение между максимином и минимаксом.

Поскольку для любой пары смешанных стратегий X и Y мы можем подсчитать среднее значение игры, то возникает задача о поиске оптимальной стратегии. Естественно начать с исследования осторожных стратегий. Осторожная стратегия первого игрока обеспечивает ему максимин. Осторожная стратегия второго игрока не позволяет первому

выиграть более минимакса. Самым значительным результатом в теории игр с противоположными интересами можно считать следующий:

Теорема. **Всякая матричная игра имеет ситуацию равновесия в смешанных стратегиях.** Доказательство данной теоремы непросто. В данном курсе оно опускается.

Следствия: Существование ситуации равновесия означает, что максимин равен минимаксу, и следовательно, любая матричная игра имеет цену. Оптимальной стратегией первого игрока является максиминная стратегия. Оптимальной стратегией второго – минимаксная. Поскольку задача поиска оптимальных стратегий решена, то говорят, что любая матричная игра **разрешима** на множестве смешанных стратегий.

Решение игры 2x2

Пример 5. Решить игру $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}$. Проверим сначала, нет ли седловой

точки; ведь если седловая точка есть, то решение игры очевидно. Убеждаемся, что седловой точки нет. Обозначим оптимальную стратегию первого игрока $(x, 1-x)$ – это вектор столбец, но для удобства записываем его в виде строки. Оптимальную стратегию второго игрока обозначим $(y, 1-y)$.

Выигрыш первого игрока есть случайная величина со следующим распределением:

$v(x,y)$	2	-1	-4	7
p	xy	$x(1-y)$	$(1-x)y$	$(1-x)(1-y)$

Находим средний выигрыш за итерацию первого игрока – математическое ожидание случайной величины $v(x,y)$:

$$M(v(x, y)) = 2xy - x(1 - y) - 4(1 - x)y + 7(1 - x)(1 - y) = \\ = 14xy - 8x - 11y + 7$$

Преобразуем данное выражение:

$$M(v(x, y)) = y(14x - 11) - 8x + 7 = y(14x - 11) - \frac{8}{14}(14x - 11) - \frac{8 \cdot 11}{14} + 7 = \\ = (14x - 11) \left(y - \frac{8}{14} \right) + \frac{7 \cdot 14 - 88}{14} = 14 \left(x - \frac{11}{14} \right) \left(y - \frac{8}{14} \right) + \frac{5}{7}$$

Данное математическое ожидание состоит из константы (5/7) и переменной части: $14(x - 11/14)(y - 8/14)$. Если значение y отличается от 8/14, то первый игрок всегда может выбрать x таким образом, чтобы сделать переменную часть положительной, увеличивая свой выигрыш. Если значение x отличается от 11/14, то второй игрок всегда может выбрать y таким образом, чтобы сделать переменную часть отрицательной, уменьшая выигрыш первого игрока. Таким образом, седловая точка определяется равенствами: $x^* = 11/14$, $y^* = 8/14$.

Решение игр $2 \times n$

Способ решения подобных игр покажем на примере.

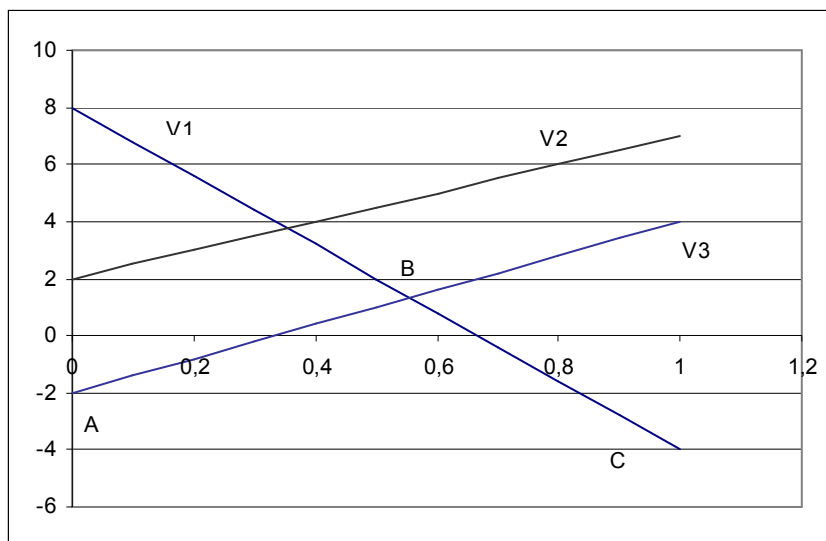
Пример 6. Решить игру $\begin{pmatrix} -4 & 7 & 4 \\ 8 & 2 & -2 \end{pmatrix}$. Проверим сначала, нет ли в

данной игре седловой точки; ведь если седловая точка есть, то решение игры очевидно. Убеждаемся, что седловой точки нет. Обозначим смешанную стратегию первого игрока $X = (x, 1-x)$ – это вектор столбец, но для удобства записываем его в виде строки.

Пусть первый игрок применяет стратегию X , а второй – свою j -ю чистую стратегию. Обозначим средний выигрыш первого игрока в этой ситуации как $v_j(x)$. Имеем:

$$(1.21) \quad v_1(x) = -4x + 8(1-x), \quad v_2(x) = 7x + 2(1-x), \quad v_3(x) = 4x - 2(1-x)$$

Изобразим графики функций (1.21) на отрезке $[0,1]$.



Ордината точки, находящейся на любом из отрезков прямых, соответствует выигрышу первого игрока в ситуации, когда он применяет смешанную стратегию $(x, (1-x))$, а второй игрок – соответствующую чистую стратегию. Гарантированный результат первого игрока – это нижняя огибающая семейства прямых (ломанная ABC). Наивысшая точка этой ломанной (точка В) является максимальным гарантированным результатом игрока 1. Абсцисса точки В соответствует оптимальной стратегии первого игрока.

Поскольку искомая точка В является пересечением линий $y = v_1(x)$ и $y = v_3(x)$, то ее абсцисса x^* может быть найдена как решение уравнения:

$$v_1(x) = v_3(x) \Rightarrow -4x + 8(1-x) = 4x - 2(1-x) \Rightarrow x^* = \frac{5}{9}$$

Таким образом, оптимальная смешанная стратегия первого игрока – $(5/9, 4/9)$. Ордината точки В является ценой игры. Она равна:

$$(1.22) \quad v^* = v_1\left(\frac{5}{9}\right) = v_3\left(\frac{5}{9}\right) = \frac{4}{3}$$

Заметим, что линия, соответствующая второй стратегии второго игрока проходит выше точки В. Это означает, что если первый игрок применяет свою оптимальную стратегию, а игрок 2 – вторую, то проигрыш второго увеличивается по сравнению с применением стратегий 1 или 3. Таким образом, вторая стратегия не должна участвовать в оптимальной стратегии второго игрока. Оптимальная стратегия игрока 2 должна иметь вид: $Y^* = (y_1^*, 0, y_3^*)$. Чистые стратегии 1 и 3 второго игрока, имеющие в оптимальной стратегии ненулевые составляющие, принято называть **существенными**. Стратегия 2 называется **несущественной**. Из рисунка выше, а также из равенства (1.22) видно, что при применении первым игроком своей оптимальной стратегии выигрыш второго игрока не зависит от того, какую из своих существенных стратегий он применяет. Он может применить также любую смешанную стратегию, состоящую из существенных (в частности – оптимальную), выигрыш и в этом случае не изменится. Совершенно аналогичное утверждение справедливо и для противоположного случая. **Если второй игрок применяет свою оптимальную стратегию, то выигрыш первого игрока не зависит от того, какую из своих существенных стратегий он применяет и равен цене игры.** Пользуясь этим утверждением, найдем оптимальную стратегию второго игрока.

Пусть оптимальная стратегия игрока 2 есть $Y^* = (y^*, 0, 1-y^*)$ и пусть первый игрок использует свою первую чистую стратегию. Тогда:

$$y^* a_{11} + (1 - y^*) a_{13} = v^* \Rightarrow -4y^* + 4(1 - y^*) = \frac{4}{3} \Rightarrow y^* = \frac{1}{3}$$

Таким образом, оптимальная стратегия второго игрока: $X^* = \left(\frac{1}{3}, 0, \frac{2}{3}\right)$.

Игра полностью решена.

Доминирование.

Игры размером $m \times 2$ решаются так же, как и игры $2 \times n$. Для этого достаточно переименовать игроков.

Если минимальный из размеров матрицы больше двух, то решение игры находится методами линейного программирования. В некоторых случаях удастся, однако, уменьшить размер матрицы и, тем самым, упростить решение. Уменьшение размеров матрицы производится при помощи приема, основанного на понятии доминирования.

Пусть a_i, a_k - две строки матрицы игры, а A_j, A_l - два ее столбца.

Определение. Говорят, что строка a_i доминирует строку a_k , если $a_i \geq a_k$. Говорят, что столбец A_j доминирует столбец A_l , если $A_j \leq A_l$.

Вернемся к матрице игры из примера 6. В ней третий столбец покомпонентно меньше второго. Это означает что третья стратегия выгоднее для второго игрока нежели вторая вне зависимости от того, какой выбор сделает первый игрок. Это и означает, что третья стратегия доминирует вторую. Вторая стратегия никогда не будет использоваться вторым игроком. Значит она несущественна и может быть удалена из матрицы игры.

Рассмотрим еще один пример.

Пример 7. Пусть дана матричная игра:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 4 & 3 & 0 \\ 1 & -7 & 2 \end{pmatrix}$$

Первая строка покомпонентно меньше второй. Значит, игрок 1 никогда не будет ее применять, и потому матрицу можно упростить, удалив первую строку. В результате получается матрица:

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 1 & -7 & 2 \end{pmatrix}$$

У вновь полученной матрицы первый столбец доминируется вторым, поэтому его тоже можно убрать. Окончательно исходная матрица упрощается до:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -7 & 2 \end{pmatrix}$$

Инспекционные игры в контроллинге вооружений

В качестве примера рассмотрим одну из так называемых инспекционных игр. В связи с заключением нескольких международных договоров о запрещении, нераспространении или сокращении некоторых видов вооружений возникает проблема проверки (верификации) выполнения сторонами этих договоров и соглашений. Чаще всего проверка осуществляется в форме периодических инспекций. Данная ситуация моделируется при помощи игры с нулевой суммой двух лиц: инспектора и инспектируемого. Предполагается, что инспектируемый имеет интерес в тайном нарушении соглашения. Задача игры – найти оптимальную схему инспекций, при которой инспектируемый удерживался бы от нарушений.

Рассмотрим одну из первых моделей этого плана, разработанную Дрешером². Игра происходит в n стадий. Инспектор на каждой стадии может осуществлять или не осуществлять инспекцию. Он имеет возможность распределить ограниченное число m инспекций на n стадий игры. Инспектируемый на каждой стадии может либо действовать легально, так как это и предписано договором, либо допустить нарушение. Нарушение допускается не более одного раза за игру. Если оно допущено на стадии, когда осуществляется проверка, то нарушение обнаруживается и инспектор выигрывает единицу, а игра на этом заканчивается. Если оно допускается при отсутствии проверки, то инспектируемый выигрывает

² Dresher, M. (1962) "A sampling inspection problem in arms control agreements: A game theoretic analysis". Memorandum No/ RM-2972-ARPA. The RAND Corporation, Santa Monica, CA

единицу. В остальных случаях выигрыши игроков равны нулю, а игра продолжается. Предполагается, что инспектируемый знает о проводящейся инспекции и знает общей число инспекций m .

Обозначим максиминный выигрыш инспектора как $I(n, m)$, где $0 \leq m \leq n$. Если инспектор обладает возможностью провести инспекцию на каждой стадии игры ($m=n$), то инспектируемый не может допустить нарушения. С другой стороны, если у инспектора не осталось проверок, то инспектируемый может свободно нарушать условия соглашения. Таким образом, имеем «начальные условия»:

$$(1.23) \quad I(n, n) = 0, \quad I(n, 0) = -1, \quad n > 0$$

Изобразим матрицу для первой стадии игры:

Инспектор	Инспектируемый	
	легальное действие	нарушение
инспекция	$I(n-1, m-1)$	+1
нет инспекции	$I(n-1, m)$	-1

Если инспектируемый проводит легальное действие, то игра продолжается и выигрыш инспектора – это выигрыш в игре, имеющей на одну стадию меньше и либо на одну проверку меньше, либо столько же проверок, в зависимости от того, использовалась инспектором на первой стадии проверка или нет.

Если инспектор применяет оптимальную смешанную стратегию $(x, 1-x)$ на первой стадии игры, то его выигрыш не зависит от того, какую чистую стратегию применяет инспектируемый. Поэтому:

$$(1.24) \quad x \cdot I(n-1, m-1) + (1-x) \cdot I(n-1, m) = x + (1-x)(-1) = I(n, m)$$

Исключая из системы (1.24) переменную x , можно получить следующее рекуррентное соотношение:

$$(1.25) \quad I(n, m) = \frac{I(n-1, m) + I(n-1, m-1)}{I(n-1, m) + 2 - I(n-1, m-1)}, \quad 0 < m < n$$

Соотношение (1.25) вместе с начальными условиями (1.23) определяет рассматриваемую нами игру для всех значений параметров. Игра может быть легко решена на современном персональном компьютере. Дрешер показал, что существует ее явное решение в виде:

$$I(n, m) = -\frac{C_{n-1}^m}{\sum_{i=1}^m C_n^i}$$

Пусть, например, $n=2$, $m=1$. Тогда, согласно (1.25) и (1.23), имеем:

$$I(n, m) = \frac{I(1, 1) + I(1, 0)}{I(1, 1) + 2 - I(1, 0)} = \frac{0 - 1}{0 + 2 + 1} = -\frac{1}{3}$$

Используя (1.24), получаем оптимальную стратегию инспектора для этого случая:

$$x + (1-x)(-1) = -\frac{1}{3} \Rightarrow x - 1 + x = -\frac{1}{3} \Rightarrow x = \frac{1}{3}$$

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ 1.

Решить матричную игру (то есть найти цену игры и оптимальные стратегии игроков):

$$1) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \quad 2) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad 3) \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad 4) \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \quad 5) \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$6) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad 7) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad 8) \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad 9) \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$10) \begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \quad 11) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & -3 \end{pmatrix} \quad 12) \begin{pmatrix} 1 & 6 & -5 \\ 5 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

13) Решить игру «чет-нечет»

14) Решить приведенную выше инспекционную игру для $n=3$, $m=1$ и для $n=3$, $m=2$.

Ответы:

1) $7/5$; $X=(0,8; 0,2)$; $Y=(0,6; 0,4)$ 2) 3, (2,1) 3) $7/2$; $X=(0,25; 0,75)$;
 $Y=(0,5; 0,5)$; 4) 2, (1,2), (2,2) 5) 5, (1,1), (1,2) 6) $7/5$; $X=(0,8; 0,2; 0)$;
 $Y=(0,6; 0; 0,4)$; 7) 3; (2,1); 8) 2; (1,2); (1,3); 9) 0,2; $X=(0,4; 0,6; 0)$;
10) 1; $X=(0,5; 0,5)$ 11) $1/7$; $X=(5/7; 2/7)$ 12) $6/7$; $X=(3/14; 11/14)$

Equation Section (Next) Тема 12. Игры с непротивоположными интересами

Предыдущая тема была посвящена антагонистическим играм двух лиц, т. е. играм, в которых интересы сторон прямо противоположны. Однако реальные задачи принятия решения в условиях конфликта характеризуются большим числом участников и, как следствие этого, неантагонистичностью конфликтной ситуации. Если говорить о конфликте двух лиц и его моделях, то можно заметить, что он также не исчерпывается только антагонистическим случаем. Дело в том, что интересы игроков могут не совпадать, но не быть обязательно противоположными. Это, в частности, может приводить к ситуациям, взаимовыгодным обоим игрокам (в антагонистическом конфликте это невозможно), что делает осмысленным кооперирование (выбор согласованного решения), приводящее к увеличению выигрыша обоих игроков. Однако возможны такие конфликты, когда кооперация или соглашение невозможны по правилам игры. Поэтому в неантагонистических играх различают бескоалиционное поведение, когда соглашения между игроками запрещены правилами, и кооперативное поведение игроков, когда разрешается кооперация типа выбора совместных стратегий и совершения побочных платежей. Рассмотрим первый случай.

Бескоалиционные игры.

Принципиальное отличие игр с непротивоположными интересами от антагонистических игр заключается в том, что сумма выигрышей игроков не равна нулю. Каждый игрок имеет свою функцию выигрыша, определенную на множестве исходов игры. Если игроков в игре всего 2, а множества чистых стратегий конечны, то игра называется **биматричной**.

Пример 1. («Семейный спор»). Муж (игрок 1) и жена (игрок 2) могут выбрать одно из вечерних развлечений: футбольный матч или театр. Если они не сойдутся во мнениях, то остаются дома. Муж предпочитает футбол, жена – театр. Однако обоим гораздо важнее провести вечер вместе, нежели разделиться. Их функции предпочтений (выигрыша) могут быть представлены двумя матрицами (откуда и происходит название этого класса игр). Пусть первая стратегия у обоих игроков – футбол, вторая – театр. Тогда:

$$(2.1) \quad \text{муж} \quad v_1 = A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{жена} \quad v_2 = B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Биматричную игру обычно представляют в более компактной форме, совмещая две матрицы в одной. В каждой клетке такой матрицы записывают два числа: сначала выигрыш первого игрока, затем второго. Таким образом, (2.1) можно переписать в виде:

$$(A, B) = \begin{pmatrix} (2, 1) & (0, 0) \\ (0, 0) & (1, 2) \end{pmatrix}$$

Пример 2 (Перекресток). Два водителя одновременно выезжают на перекресток. Если ни один из них не остановится, то они столкнутся. Однако каждый предпочитает проехать первым, нежели пропустить партнера. Формализация этого конфликта представлена матрицей:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \text{ехать} & \text{остановиться} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{ехать} \\ \text{остановиться} \end{array} & \begin{pmatrix} -10, -10 & 5, 0 \\ 0, 5 & 2, 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

Пример 3 («Дилемма заключенного»). Классическая формулировка дилеммы сводится примерно к следующему. Двоих подозреваемых сажают в разные камеры, не давая общаться друг с другом, и требуют от них признания в совершении тяжкого преступления. В случае, если оба не признаются, у следствия достаточно улик по другим пунктам обвинения, чтобы отправить обоих за решетку на 2 года. Если, однако, признается только один из заключенных, то с него снимаются все обвинения и он отпускается на свободу. Непризнавшийся в этом случае получает 10 лет тюрьмы. Если признаются оба, то оба получают по 5 лет тюрьмы. Оба заключенных в курсе этих правил игры.

	признаваться	не признаваться
признаваться	-5, -5	0, -10
не признаваться	-10, 0	-2, -2

Парадокс ситуации в том, что стратегия «признаваться» доминирует стратегию «не признаваться». Действительно, каждый игрок может рассуждать следующим образом. Предположим, мой партнер решил признаться. Каково лучшее решение с моей стороны в этом случае? Если я не признаюсь, то получу 10 лет, если признаюсь, то только 5. Лучше признаваться. Предположим теперь, что мой партнер решил не признаваться. Каково лучшее решение с моей стороны в этом случае? Если я не признаюсь, то получу 2 года, если признаюсь, то выйду на свободу. Опять лучшим для меня является признание. Таким образом, что бы не предпринял мой партнер, для меня будет лучше признаться. Если, однако, оба признаются, то оба получают по 5 лет, в то время как обоюдное непризнание было бы выгоднее обоим (по 2 года).

Структура игры «дилемма заключенного» (коротко ДЗ) весьма характерна для моделирования взаимодействия двух игроков в самых разных областях человеческой деятельности. Политическое/экономическое взаимодействие государств часто описывается в терминах конфликт (К) и сотрудничество (С). Ниже будет приведена матрица ДЗ, содержащая именно такие обозначения стратегий. Числа в ней отличаются от чисел матрицы ДЗ, приведенной выше, однако структура отношений предпочтения является точно такой же. В силу этого и стратегическое решение игры оказывается тем же. Предположим, что взаимодействие двух стран, включает такие аспекты, как экспорт страной 1 в страну 2 стали и импорт куриных окорочков. Ситуация status quo представляет собой взаимовыгодное сотрудничество (С,С).

	конфликт	сотрудничество
конфликт	0, 0	10, -5
сотрудничество	-5, 10	5, 5

Предположим, страна 2 решила получить односторонние преимущества в торговом балансе и приняла меры, препятствующие импорту стали. В результате возникает ситуация (С,К), которая неприемлема для страны 1. В качестве ответной меры страна 1 налагает запрет на ввоз окорочков. В результате возникает ситуация (К,К), которая менее выгодна обоим сторонам, чем ситуация status quo.

Принципы оптимальности в бескоалиционных играх

Известно, что для антагонистических игр принципы минимакса, максимина и равновесия совпадают (если они реализуемы, т. е. существует равновесие, а максимин и минимакс достигаются). В таком случае они определяют единое понятие оптимальности и решения игры. В теории неантагонистических игр нет единого подхода к выработке принципов

оптимальности. По существу имеется целое множество таких принципов, каждый из которых основывается на некоторых дополнительных предположениях о поведении игроков и структуре игры.

Естественно предположить, что в игре G каждый из игроков стремится к достижению ситуации r , в которой значение его функции полезности (выигрыша) было бы наибольшим. Однако функция выигрыша v_i зависит не только от стратегии i -го игрока, но и от стратегий, выбираемых другими игроками, поэтому ситуации, дающие большее значение выигрыша для i -го игрока, могут не быть таковыми для других игроков. Таким образом, так же как и в случае антагонистической игры, стремление игроков получить наибольший выигрыш носит конфликтный характер и сама формулировка того, какое поведение является «хорошим» или оптимальным в игре, является проблематичной. Здесь имеется несколько подходов. Одним из них является равновесие по Нэшу и его различные обобщения. В случае, когда игра G является антагонистической, равновесие по Нэшу совпадает с понятием равновесия, которое представляет собой основной принцип оптимальности в антагонистической игре.

Пусть $r = (k_1, \dots, k_i, \dots, k_n)$ — произвольная ситуация-в игре G , а k_i — некоторая стратегия игрока i . Построим ситуацию, которая отлична от r только тем, что стратегия k_i игрока i заменена на стратегию k_i^0 . В результате мы получаем ситуацию $(k_1, \dots, k_i^0, \dots, k_n)$, которую будем обозначать через $(r \parallel k_i^0)$. Очевидно, что если k_i и k_i^0 совпадают, то $(r \parallel k_i^0) = r$.

Определение. Ситуация $r^* = (k_1^*, \dots, k_i^*, \dots, k_n^*)$ называется **ситуацией равновесия по Нэшу**, если для любого игрока $i \in N$ и любой его альтернативы $k_i \in A_i$ имеет место неравенство

$$(2.2) \quad v_i(r^*) \geq v_i(r^* \parallel k_i)$$

Множество ситуаций, равновесных по Нэшу в игре G , будем обозначать $NE(G)$. Тот факт, что r^* равновесна по Нэшу будем записывать как $r^* \in NE(G)$.

Из определения ситуации равновесия по Нэшу следует, что ни один из игроков i не заинтересован в отклонении от стратегии k_i^* , входящей в эту ситуацию (согласно (2.2) его выигрыш при использовании другой стратегии разве лишь уменьшится при условии, что остальные игроки придерживаются стратегий, образующих ситуацию равновесия r^*). Таким образом, если игроки договорились предварительно об использовании стратегий, входящих в ситуацию равновесия r^* , то индивидуальное отклонение от договора невыгодно отклонившемуся игроку.

Определение. Стратегия k_i^* называется равновесной, если она входит хотя бы в одну ситуацию равновесия по Нэшу.

Для биматричной $(m \times n)$ -игры $G(A, B)$ пара (i^*, j^*) будет ситуацией равновесия по Нэшу $((i^*, j^*) \in NE(G))$, если неравенства

$$(2.3) \quad a_{ij^*} \leq a_{i^*j^*}, \quad b_{i^*j} \leq b_{i^*j^*}$$

выполняются для всех номеров строк $i \in \{1, \dots, m\}$ и столбцов $j \in \{1, \dots, n\}$.

Так, в игре «семейный спор» равновесными являются ситуации (1,1) и (2,2), в игре «перекресток» — (1,2) и (2,1).

Постараемся сопоставить понятия равновесия для антагонистических матричных и неантагонистических биматричных игр.

Напомним, что для антагонистической игры пара (i^*, j^*) является ситуацией равновесия, если

$$v(i, j^*) \leq v(i^*, j^*) \leq v(i^*, j)$$

При этом имеют место следующие основные свойства антагонистических игр.

1. Игроку невыгодно информировать своего противника о стратегии (чистой или смешанной), которую он собирается применить. (Конечно, если игрок собирается использовать оптимальную стратегию, то его выигрыш не уменьшится от того, что он объявит об этом, но он ничего и не выигрывает.)
2. Если (i,j) и (k,l) — ситуации равновесия в игре, то ситуациями равновесия являются также ситуации (i,l) , (k,j) и

$$(2.4) \quad v = v(i, j) = v(i, l) = v(k, l) = v(k, j)$$

3. Игроки не заинтересованы в общении перед началом игры для выработки совместных действий.
4. Если в игре существует ситуация равновесия, а i^* — максиминная и j^* — минимаксная стратегии соответственно 1 и 2 игроков, то (i^*, j^*) — ситуация равновесия, и наоборот.

Выясним, выполняются ли эти свойства для биматричных игр.

Рассмотрим игру «семейный спор» (см. пример 1). Как уже отмечалось, в ней есть две равновесные ситуации $(1,1)$ и $(2,2)$. Однако выигрыши игроков в этих ситуациях различны, что противоречит (2.4). Далее заметим, что, несмотря на равновесность ситуаций $(1,1)$ и $(2,2)$, пары $(1,2)$ и $(2,1)$ не являются ситуациями равновесия по Нэшу, т. е. свойство 2 не выполнено полностью.

Если игрок 1 информирует партнера о намерении выбрать стратегию 1, и если игрок 2 убежден, что тот будет упорствовать, то ему ничего не остается, как объявить первую стратегию. Аналогичные рассуждения можно провести и за игрока 2. Таким образом, каждому из игроков выгодно первому объявить свою стратегию, что противоречит свойству 1 для антагонистических игр.

Предположим, что игроки не общаются до начала игры, а делают выбор одновременно и независимо друг от друга (как и предусмотрено правилами бескоалиционной игры). Проведем рассуждения за игрока 1. Ему выгодно, чтобы реализовалась ситуация (1,1) с выигрышами $\{2,1\}$. Но игроку 2 выгодна ситуация (2,2) с выигрышами $\{1,2\}$. Поэтому, если игрок 1 выберет стратегию 1, то игрок 2 может выбрать стратегию 2, и они оба проиграют (вектор выигрышей $\{0, 0\}$). Тогда игроку 1 имеет смысл выбрать стратегию 2, поскольку в ситуации (2,2) он получает выигрыш 1. Но игрок 2 может рассуждать аналогично и выбрать 1, тогда в ситуации (1,2) они оба опять проиграют.

Таким образом, имеет место случай, когда ситуация выгодна (и поэтому неустойчива) для игрока 1. Аналогично (с точки зрения игрока 2) можно исследовать ситуацию (2,2). Поэтому игрокам выгодно общаться перед началом игры и договариваться о совместном плане действий, что противоречит свойству 3. Затруднения возникают также из-за того, что пара максиминных стратегий не является равновесной (противоречит свойству 4).

Таким образом, мы имеем пример игры, когда не выполнено ни одно из свойств 1 — 4 антагонистической игры.

Итак, в различных ситуациях равновесия по Нэшу векторы выигрышей игроков могут быть различны. Кроме того, множество ситуаций равновесия по Нэшу в отличие от множества ситуаций равновесия в антагонистической игре не является прямоугольным. Ситуация равновесия по Нэшу является множественным принципом оптимальности в том смысле, что различные ситуации равновесия могут быть в разной степени предпочтительными для различных игроков. Таким образом, остается не решенным вопрос: какую из ситуаций равновесия можно принять как устраивающий всех игроков принцип оптимальности? В дальнейшем будет показано, что

множественность принципа оптимальности является существенной характерной чертой оптимального поведения в конфликтных управляемых процессах со многими участниками.

Пусть $r^* = (a_1^*, \dots, a_n^*)$ - ситуация равновесия по Нэшу. В отличие от антагонистического случая равновесная стратегия i -го игрока a_i^* далеко не всегда обеспечивает получение, по крайней мере, выигрыша $v_i(r^*)$, поскольку это существенно зависит от того, выберут ли остальные игроки стратегии, входящие в ситуацию равновесия по Нэшу. Поэтому равновесную стратегию не следует трактовать как оптимальную стратегию i -го игрока. Такая трактовка осмыслена только для набора стратегий игроков, т. е. для ситуаций.

Важная особенность ситуации равновесия по Нэшу заключается в том, что отклонение от нее двух игроков и более может привести к увеличению выигрыша хотя бы одного из отклонившихся игроков. Пусть $S \in N$ — некоторое подмножество множества игроков (коалиция) и пусть $r = (a_1, \dots, a_n)$ — ситуация в игре G . Обозначим через $(r \parallel a_S^0)$ — ситуацию, которая получается из ситуации r при замене в ней стратегий $a_i \rightarrow a_i^0$, $i \in S$. Иными словами, в ситуации $(r \parallel a_S^0)$ игроки, входящие в коалицию S , заменяют свои стратегии на другие. Если r^* — ситуация равновесия по Нэшу, то из (2.3) вовсе не следует, что

$$(2.5) \quad v_i(r^*) \geq v_i(r^* \parallel a_S^0), \quad \forall i \in S$$

Например, в игре «дилемма заключенного» (ДЗ) имеется ситуация равновесия по Нэшу — (конфликт, конфликт). Ни одному из игроков невыгодно отклоняться от этой ситуации в одиночку. Однако, если оба игрока одновременно сменяют свои действия на «сотрудничество», то оба увеличат свой выигрыш.

Можно усилить понятие равновесия по Нэшу, потребовав выполнения условия (2.5) или ослабленного условия (2.5), требуя уменьшения выигрыша хотя бы для одного из игроков коалиции S при отклонении от ситуации равновесия. Тогда мы приходим к следующему определению.

Определение. Ситуация r^* называется сильно равновесной, если $\forall S \subset N, \forall a_s$, выполняется неравенство

$$(2.6) \quad \sum_{i \in S} v_i(r^*) \geq \sum_{i \in S} v_i(r^* \| a_s)$$

Условие (2.6) гарантирует нецелесообразность соглашения между игроками с целью вступления в некоторую коалицию S , так как в любой коалиции находится игрок j , которого это соглашение не устраивает. Любая сильно равновесная ситуация является равновесной.

Если бы сильное равновесие существовало в достаточно широком классе игр, то оно могло бы явиться приемлемым принципом оптимальности в бескоалиционной игре. Однако оно существует крайне редко.

В игре ДЗ ситуация равновесия (К,К) не является сильно равновесной. Она дает игрокам вектор выигрышей $\{0,0\}$. Однако если оба игрока сыграют (С,С), то они получают вектор выигрышей $\{5, 5\}$, что выгодно обоим. Эта ситуация не является равновесной, но она лучше равновесной для обоих игроков.

Последнее рассуждение приводит к мысли о возможности других принципов оптимальности в бескоалиционной игре, приводящих к ситуациям, более выгодным обоим участникам, чем в случае равновесных ситуаций. Таким принципом оптимальности является *оптимальность по Парето*. В игре ДЗ ситуация (С,С) с выигрышами $\{5,5\}$ является оптимальной по Парето, но не равновесной.

Содержательное различие понятий ситуации равновесия и ситуации, оптимальной по Парето, состоит в следующем. В первой ситуации ни один игрок, действуя в одиночку, не может увеличить своего выигрыша, во второй — все игроки, действуя совместно, не могут (даже не строго) увеличить выигрыш каждого.

Заметим также, что соглашение о выборе фиксированной ситуации равновесия удерживает каждого индивидуального игрока от отклонения от нее. В оптимальной по Парето ситуации отклонившийся игрок может в некоторых случаях получить существенно больший выигрыш. В то же время сильно равновесная ситуация безусловно является и оптимальной по Парето. Так, в ДЗ ситуация (К,К) равновесна, но не оптимальна по Парето. Вместе с тем ситуация (С,С), наоборот, оптимальна по Парето, но не является равновесной. В игре «семейный спор» обе равновесные ситуации (1,1) и (2,2) сильно равновесны и оптимальны по Парето, но, как уже отмечено, не являются взаимозаменяемыми.

Такая же картина имеет место и в игре «перекресток». В этой игре ситуации (1,2), (2,1) равновесны и оптимальны по Парето (ситуация (2,2) оптимальна по Парето, но не равновесна). Для каждого игрока равновесной является стратегия «остановиться», если другой игрок решил проехать перекресток, и, наоборот, выгодно выбрать стратегию «ехать», если другой игрок остановился. Однако выигрыш в 5 единиц каждый из игроков получает только при выборе стратегии «ехать», поэтому здесь неизбежна борьба за лидерство, т. е, каждый из игроков заинтересован первым заявить, что он выбрал стратегию «ехать».

Заметим, что точно к такому же выводу мы пришли при анализе игры «семейный спор».

Сформулируем без доказательства следующее утверждение. *Если бескоалиционная игра G двух лиц имеет по крайней мере две оптимальных*

по Парето и равновесных по Нэшу ситуации r_1, r_2 с различными векторами выигрышей

$$(v_1(r_1); v_2(r_1)) \neq (v_1(r_2); v_2(r_2))$$

то в игре G имеет место борьба за лидерство.

Смешанное расширение бескоалиционной игры

В антагонистическом случае ситуация равновесия в обычных чистых стратегиях, вообще говоря, не существует. Даже матричные игры в общем случае имеют ситуацию равновесия лишь в смешанных стратегиях. Поэтому естественно искать равновесие по Нэшу в бескоалиционной игре в классе смешанных стратегий. В случае двукомпонентной смешанной стратегии $\vec{x} = X = (x, 1-x)$, вектор X полностью определяется своей первой компонентой x . Поэтому, в таких случаях будем часто использовать запись $u(x)$ вместо $u(X)$.

Пусть в игре «семейный спор» первый игрок хочет максимально увеличить свой гарантированный выигрыш. Это означает, что он намерен выбрать свою смешанную стратегию $\vec{x} = (x, 1-x)$ так, чтобы максимально увеличить наименьшую из двух величин: $v_1^1(x) = v_1(x, 1)$ и $v_1^2(x) = v_1(x, 2)$.

Максиминная стратегия первого игрока имеет вид $\vec{x}^0 = \left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$ и дает ему

средний гарантированный выигрыш $v_1^0 = \frac{2}{3}$. Аналогично, максиминная

стратегия второго игрока имеет вид $\vec{y}^0 = \left(\frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right)$, а средний

гарантированный выигрыш $v_2^0 = \frac{2}{3}$.

Если первый игрок придерживается своей максиминной стратегии, а второй игрок выберет первую стратегию, то он получит выигрыш $1/3$. Если

же второй игрок выбирает вторую чистую стратегию, то он получает $4/3$, что больше его максимального гарантированного результата. Аналогичным образом, если второй игрок придерживается своей максиминной стратегии, а первый игрок выберет первую стратегию, то он получит выигрыш $4/3$, что больше его максимального гарантированного результата. Если же первый игрок выбирает вторую чистую стратегию, то он получает $1/3$. Мы видим, что ситуация, состоящая из максиминных стратегий, не является равновесной. Заметим, что если оба игрока одновременно попытаются заменить свои смешанные стратегии на «более выгодные» чистые, то оба получат 0.

Мы видим, что выбор максиминной стратегии не обеспечивает, вообще говоря, равновесности возникающей ситуации. Возникает вопрос, можно ли выбрать смешанную стратегию так, чтобы она была равновесной? Приведем без доказательства следующую теорему.

Теорема. Пусть G – биматричная $(m \times n)$ игра. Тогда существуют смешанные стратегии X^* и Y^* игроков 1 и 2 соответственно, такие, что пара (X^*, Y^*) является ситуацией равновесия по Нэшу $((x^*, y^*) \in NE(G))$.

Напомним, что для матричных игр каждая существенная чистая стратегия уравнивает любую оптимальную стратегию противника. Аналогичный результат справедлив и для биматричных игр. Приведем его без доказательства.

Теорема. Пусть $G(A, B)$ – биматричная игра $(m \times n)$ с матрицами выигрышей игроков A и B , и пусть $(X, Y) \in NE(G(A, B))$ – ситуация равновесия в смешанных стратегиях. Тогда выполняются равенства:

$$(2.7) \quad v_1(i, Y) = v_1(X, Y)$$

$$(2.8) \quad v_2(X, j) = v_2(X, Y)$$

где i и j – любые существенные стратегии игроков 1 и 2.

Данная теорема дает способ нахождения оптимальных смешанных стратегий игроков в игре $G(A,B)$. Действительно, предположим, что мы ищем ситуацию равновесия (X,Y) , считая множества существенных стратегий игроков (спектры) M_x, N_y заданными. Тогда оптимальные стратегии должны удовлетворять системе линейных уравнений:

$$(2.9) \quad \begin{cases} Y\vec{a}_i = v_1 & i \in M_x \\ XB_j = v_2 & j \in N_y \end{cases}$$

где $\vec{a}_i$ - i -ая строка матрицы A , B_j - j -ый столбец матрицы B , а v_1, v_2 - некоторые числа. Если же ситуация равновесия вполне смешанная, то есть все чистые стратегии являются существенными, то система (2.9) принимает вид:

$$(2.10) \quad \begin{cases} AY = v_1 e_m & e_m = (1, 1, \dots, 1) \\ XB = v_2 e_n^T & e_n^T = (1, 1, \dots, 1) \end{cases}$$

где $v_1 = XAY, v_2 = XBY$ - выигрыши игроков в ситуации равновесия (X,Y) .

Теорема. Пусть $G(A,B)$ – биматричная квадратная $(n \times n)$ игра и матрицы A и B – невырожденные ($\det A \neq 0, \det B \neq 0$). Если игра $G(A,B)$ имеет вполне смешанную ситуацию равновесия, то она единственная и вычисляется по формулам:

$$(2.11) \quad X = v_2 \vec{e} B^{-1} \quad Y = v_1 A^{-1} \vec{e}$$

где

$$(2.12) \quad v_1 = \frac{1}{\vec{e} A^{-1} \vec{e}}, \quad v_2 = \frac{1}{\vec{e} B^{-1} \vec{e}}$$

Доказательство: Если (X, Y) – вполне смешанная ситуация равновесия, то X и Y с необходимостью удовлетворяют системе (2.10). Умножим первое из равенств (2.10) слева на A^{-1} , а второе справа на B^{-1} , получим (2.11). Далее, умножая (2.11) справа и слева на вектор $\vec{e}$, состоящий из единиц, и учитывая, что $X\vec{e} = \vec{e}Y = 1$, получаем (2.12). Единственность вполне смешанной ситуации (X, Y) следует из единственности решения системы (2.10) в условиях теоремы.

Справедливо и обратное утверждение. Если пара векторов $X \geq 0$, $Y \geq 0$ удовлетворяет (2.11) и (2.12), то она образует ситуацию равновесия в смешанных стратегиях с вектором равновесных выигрышей (2.12).

Проиллюстрируем данную теорему на примере игры «семейный спор». Она удовлетворяет условиям теоремы. Согласно (2.12) $v_1 = v_2 = 2/3$. Согласно (2.11) $X = \left(\frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right)$, $Y = \left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$. Нетрудно убедиться, что $(X, Y) \in NE(G)$.

Коалиционные игры. Равновесие в совместных смешанных стратегиях.

Борьба за лидерство затрудняет нахождение взаимоприемлемого решения, порождая неантагонистический конфликт. Путь к разрешению этого конфликта лежит в согласовании позиций сторон. В рамках бескоалиционной игры этого сделать невозможно. Поэтому рассмотрим следующую формализацию игры, допускающую образование коалиций, а, значит, разрешающую предварительные переговоры и согласование решений. В рамках новой формализации игроки могут принимать совместные решения. Проиллюстрируем этот подход на примере игры «семейный спор».

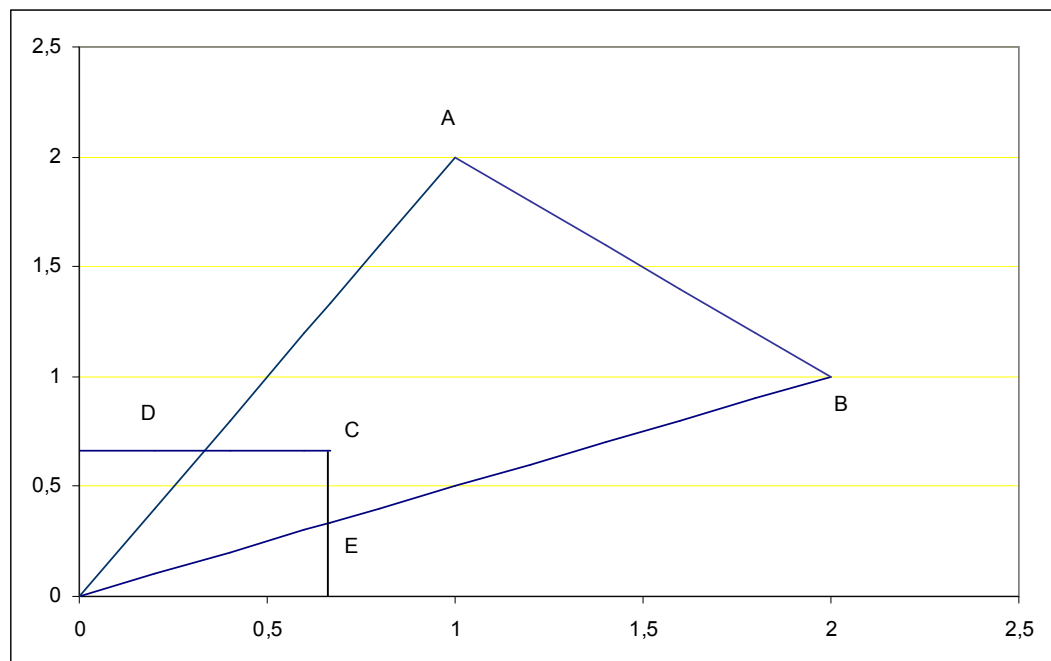
Под совместной смешанной стратегией игроков будем понимать вероятностное распределение на множестве всевозможных пар (i,j) (ситуаций в чистых стратегиях). Игроки могут договориться о совместном выборе ситуаций в соответствии с оговоренным распределением. Например, игроки могут договориться никогда не выбирать ситуации $(1,2)$ и $(2,1)$, а равновесные по Нэшу и оптимальные по Парето ситуации $(1,1)$ и $(2,2)$ выбирать с вероятностью $\frac{1}{2}$ (это можно осуществить по результатам бросания монетки). Тогда распределение вероятностей и матрица выигрышей выглядят следующим образом:

$$\begin{matrix} & \begin{matrix} \text{вероятности} \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0,5 & 0 \\ 0 & 0,5 \end{pmatrix} & \begin{matrix} \text{выигрыши} \end{matrix} \\ & \begin{pmatrix} 2,1 & 0,0 \\ 0,0 & 1,2 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Средние выигрыши игроков при применении указанной совместной смешанной стратегии равны 1,5. Этот выигрыш заметно выше выигрыша при равновесных смешанных стратегиях, исход оптимален по Парето. Таким образом, указанная совместная смешанная стратегия может быть рекомендована в качестве решения игры «семейный спор».

Задача о переговорах

На рисунке ниже изображен треугольник, представляющий множество векторов выигрышей, реализуемых при различных совместных смешанных стратегиях. Угловые точки этого треугольника – это выигрыши, соответствующие четырем возможным исходам игры в чистых стратегиях (два из этих исходов совпадают).



Внутренние точки треугольника представляют собой возможные исходы переговоров между игроками о выборе совместной смешанной стратегии. Поскольку каждый из игроков имеет в своем распоряжении максиминную стратегию, которая обеспечивает ему выигрыш в $\frac{2}{3}$ вне зависимости от действий другого игрока, то он никогда не согласится на получение меньшего выигрыша. По этой причине в результате переговоров могут быть реализованы не все точки треугольника, а только точки, заключенные внутри фигуры $ABECD$, обеспечивающие каждому из игроков выигрыш не менее его максимина. Указанное множество называется **переговорным**.

Ясно, что игрокам нет смысла выбирать не оптимальные по Парето точки. Значит, переговорное множество фактически сокращается до отрезка AB . Задача выбора точки из переговорного множества называется задачей о переговорах. Для решения этой задачи можно предложить различные **арбитражные схемы**. Наиболее известной является арбитражная схема Нэша. Схема Нэша базируется на системе аксиом, одной из которых является аксиома о равноправии партнеров. Поэтому схема Нэша дает в нашем случае в качестве решения середину отрезка AB .

Аксиома о равноправии игроков является формальным выражением идеи справедливости. Однако эта аксиома далеко не всегда принимается сторонами реальных переговоров, поэтому схема Нэша имеет скорее теоретический интерес.

Задачи:

Найти ситуации равновесия по Нэшу и Парето-оптимальные ситуации:

$$1) \begin{pmatrix} 2,3 & 1,0 \\ 0,2 & 5,6 \end{pmatrix} \quad 2) \begin{pmatrix} 2,3 & 1,6 \\ 5,0 & 0,1 \end{pmatrix} \quad 3) \begin{pmatrix} 2,3 & 1,6 \\ 5,0 & 3,1 \end{pmatrix} \quad 4) \begin{pmatrix} 2,3 & 5,6 \\ 4,2 & 3,1 \end{pmatrix}$$

5) Существуют ли сильно равновесные ситуации в играх 1-4?

6) Рассматривая игры 1-4 как бескоалиционные, найти ситуации равновесия по Нэшу в смешанных стратегиях.

7) Рассматривая игры 1-4 как коалиционные, найти в них переговорные множества

Equation Section (Next) Тема 13. Кооперативные игры.

В теории игр имеется три основных формы представления игры. Это расширенная форма (дерево игры), нормальная форма (стратегические матрицы) и форма характеристической функции, которая и применяется в теории кооперативных игр. Теория кооперативных игр - это теория коалиций. Она изучает игровые ситуации, в которых допустимы совместные действия игроков и побочные платежи (перераспределение выигрыша). Для возможности беспрепятственного перераспределения выигрыша принимается допущение о том, что любые выигрыши, как индивидуальные, так и коллективные, приводимы к единой шкале (например к денежному эквиваленту) и неограниченно делимы. Смысл этой идеи заключается в том, что выигрыш коалиции всегда можно разделить между ее участниками в нужной пропорции. Одной из основных

проблем теории кооперативных игр является как раз проблема (справедливого) дележа.

Новым элементом игры являются побочные платежи. Что нового они дают? Проиллюстрируем это на простом примере. Пусть имеется игра типа «семейного спора», но с перераспределяемыми (трансферабельными) выигрышами, заданная матрицей:

$$\begin{pmatrix} 4,2 & 0,0 \\ 0,0 & 2,6 \end{pmatrix}$$

Пусть игроки применяют совместную смешанную стратегию $(x, 1-x)$, где x – вероятность выбора точки $(4,2)$, а $(1-x)$ – точки $(2,6)$. Оптимальным по Парето множеством в этой игре является отрезок прямой, соединяющий указанные точки. В зависимости от выбранной стратегии x суммарный выигрыш обоих игроков будет равен:

$$(3.1) \quad v_1(x) + v_2(x) = 4x + 2x + (1-x)2 + (1-x)6 = 8 - 2x$$

Максимум (3.1), равный 8, достигается при $x=0$, то есть при выборе обоими игроками своих вторых чистых стратегий. Пусть игроки выбрали какую-то совместную смешанную стратегию, в которой x отличен от нуля. Тогда, согласно (3.1), их суммарный выигрыш меньше 8. Рассмотрим следующую альтернативу. Игроки договариваются о том, что будут неизменно выбирать точку $(2,6)$ с суммарным выигрышем 8, но второй игрок будет регулярно передавать часть своего выигрыша первому игроку с таким расчетом, чтобы выигрыши обоих игроков были больше, чем при применении стратегии x . Это всегда можно сделать, так как разница в суммарных выигрышах составляет $2x$. Надо лишь как-то разделить ее между игроками, например, пополам. Тогда первый игрок получит $v_1(x) + x$, а второй – $v_2(x) + x$. То есть оба получают больше, чем при применении даже совместной смешанной стратегии. Таким образом,

побочные платежи могут обеспечить игрокам большие возможности, нежели совместные смешанные стратегии.

Отметим лишь, что для осуществления идеи побочных платежей игра должна удовлетворять определенным требованиям. Выигрыши должны быть трансферабельными. Например, в классической постановке игры «семейный спор» жена не может передать часть своего удовольствия от посещения театра мужу. Выигрыши здесь не трансферабельны, и побочные платежи невозможны. Кроме того, выигрыши коалиций игроков должны быть устроены таким образом, чтобы побочные платежи были реализуемы. (Коалиция должна иметь «лишние деньги»).

В рамках теории кооперативных игр обычно принимаются следующие обозначения. Любое непустое множество игроков $S \in N$ называется коалицией. Например, множество $\{1, 2\}$ называется коалицией игроков 1 и 2. Характеристической функцией игры n лиц, отождествляемой обычно с игрой, называется вещественная функция $v(S)$, определенная на множестве всех коалиций $S \in N$, и удовлетворяющая условиям:

$$v(T) + v(S) \leq v(T \cup S) \text{ (при } T \cap S = \emptyset) \text{ и } v(\emptyset) = 0.$$

Говоря простым языком, характеристическая функция - это функция выигрыша коалиции, которая каждой коалиции ставит в соответствие число - ее выигрыш в универсальных перераспределяемых единицах. Это число $v(S)$, характеризует возможности коалиции и является мерой того, чего могут достигнуть участники S , формируя свою коалицию независимо от других игроков. В частности $v(\{i\})$ есть то, чего может достигнуть отдельный игрок i своими собственными силами: его индивидуальный выигрыш (максимин). Первое из вышеприведенных условий называется свойством супераддитивности и означает, что расширение состава коалиции не может приводить к уменьшению ее возможностей. Второе условие есть просто доопределение функции на пустом множестве: пустая

коалиция не имеет никакого выигрыша. Кооперативная игра считается заданной, если задана характеристическая функция, то есть, если указаны выигрыши каждой коалиции.

Для коалиции из двух и более игроков не имеет значения, как она формируется, каким путем игроки пришли к соглашению или насколько вероятно, что они вообще сформируют какую-либо коалицию. Ключевым моментом является только то, что $v(S)$ реализуется *только* в результате соглашения и сотрудничества *всех* членов S . Выигрыш $v(S)$ коалиции S является агрегированной величиной, то есть единственным числом, а не вектором, определяющим для каждого члена коалиции его индивидуальный выигрыш.

Из свойства супераддитивности следует, что для любой системы непересекающихся множеств $S_1, \dots, S_k$

$$\sum_{i=1}^k v(S_i) \leq v(N)$$

Это, в частности, означает, что не существует такого разбиения множества N на коалиции, чтобы суммарный выигрыш этих коалиций превышал выигрыш всеобщей коалиции.

Основная задача теории кооперативных игр заключается в построении реализуемых принципов оптимального распределения выигрыша всеобщей коалиции $v(N)$ между ее участниками. Пусть α_i - сумма, которую получает игрок i при распределении выигрыша. Тогда вектор $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ называется *дележом*, если выполнены следующие условия

$$(3.2) \quad \begin{aligned} \alpha_i &\geq v(\{i\}), \quad i \in N \\ \sum_{i=1}^n \alpha_i &= v(N) \end{aligned}$$

Смысл условий весьма прозрачен. Они означают, что каждый игрок должен получить при дележе не меньше, чем он может заработать в

одинокую, и, что весь выигрыш коалиции полностью и без остатка должен быть поделен между ее участниками.

Если в (3.2) имеет место знак строгого неравенства, то игра называется существенной, в противном случае - она несущественна. В существенной игре каждый участник всеобщей коалиции может получить строго больше, чем может заработать сам.

Существуют различные способы дележа, предложенные для игр с n участниками. Один из них - значения Шепли³. 1953 г. Шепли ввел понятие вектора значений $\varphi[v] = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ для кооперативной игры $v(S)$ с множеством игроков $N = \{1, 2, \dots, n\}$, $S \subset N$. Эти значения, введенные аксиоматическим путем, могут быть интерпретированы как математическое ожидание вклада игрока i в выигрыш всеобщей коалиции $v(N)$, в предположении, что все упорядочения игроков являются равновероятными.

Согласно теореме Шепли значение, определенное выше, является единственной функцией, удовлетворяющей следующей системе аксиом:

S1: Симметричность. Пусть π есть перестановка игроков, такая что $\pi(i)$ есть образ игрока i . Тогда значение Шепли игрока $\pi(i)$ во вновь полученной игре равно значению Шепли для игрока i в исходной игре.

$$\varphi_{\pi(i)}[\pi v] = \varphi_i[v]$$

S2: Линейность. Пусть игра g есть сумма двух игр v и w . Тогда значения Шепли в игре $v+w$ есть сумма значений Шепли в играх v и w .

$$\varphi[v + w] = \varphi[v] + \varphi[w]$$

S3: Эффективность или нормализация. Сумма значений Шепли для всех игроков равна выигрышу всеобщей коалиции $v(N)$

$$\sum_N \varphi_i = v(N)$$

³ Shapley, Lloyd S. (1953). A value for n -person games, Ann. Math. Studies 28, pages 307-318.

Значения Шепли - это вектор дележа, т.е. способ (справедливого) распределения суммарного выигрыша $v(N)$ полной коалиции игроков такой, что каждый игрок i получает величину ϕ_i (значение Шепли).

Одна из возможных интерпретаций значений Шепли состоит в следующем. Предположим, имеется произвольный порядок игроков, заданный перестановкой π на множестве N , где $\pi(i)$ есть позиция игрока i (например, если $n=5$ и порядок игроков есть 5, 2, 4, 3, 1, то $\pi(5)=1$, $\pi(2)=2$, $\pi(4)=3$, $\pi(3)=4$, $\pi(1)=5$), и пусть игроки входят в комнату в этом порядке. В определенный момент игроки в комнате формируют коалицию S с выигрышем $v(S)$. Каждый входящий в комнату игрок i увеличивает коалицию $b_\pi(i)$ игроков, вошедших до него, и увеличивает ее выигрыш за счет своего участия на величину

$$v(b_\pi(i) \cup \{i\}) - v(b_\pi(i))$$

Данная величина не является постоянной, она зависит от того сколько и каких именно игроков вошло в комнату до i . Если рассмотреть все мыслимые перестановки из n игроков (их всего $n!$) с учетом вероятностей их возникновения и подсчитать взнос игрока i в каждом случае, то можно вычислить математическое ожидание, то есть некий среднестатистический взнос игрока i . Это и будет его значением Шепли. Обычно все перестановки игроков принимаются равновероятными, тогда значение Шепли ϕ_i для игрока i есть:

$$\phi(i) = \frac{1}{n!} \sum_{\pi} (v(b_\pi(i) \cup \{i\}) - v(b_\pi(i)))$$

где суммирование производится по всем перестановкам игроков.

Более подробной формулой для значения Шепли игрока i является:

$$(3.3) \quad \phi_i[v] = \sum_{\substack{T \subseteq N \\ i \in T}} \frac{(t-1)!(n-t)!}{n!} [v(T) - v(T - \{i\})]$$

где n и t - числа игроков в коалициях N и T соответственно.

Простая игра есть кооперативная игра, в которой выигрыш $v(S)$ любой коалиции S есть либо 0, либо 1. Простую игру можно представить как систему принятия решений (например, голосование в парламенте): коалиция S может быть либо достаточной для прохождения решения (тогда $v(S) = 1$, и в этом случае она - *выигрывающая* коалиция) или нет (тогда $v(S) = 0$, и в этом случае она - *проигрывающая* коалиция). Частным примером является взвешенная мажоритарная игра, где каждый игрок i (например, партия в парламенте) имеет определенный неотрицательный вес w_i (например, число мест) и имеется определенная *квота* $q \in [0, 1]$ (например, $q = 1/2$), определяющая общее количество голосов, необходимое для прохождения решения. То есть, если общий вес $w(S)$ коалиции S определяется как сумма весов ее членов $w(S) = \sum_{i \in S} w_i$, то S является выигрывающей коалицией ($v(S) = 1$) если она имеет требуемое большинство голосов: $w(S) > q w(N)$, в противном случае она проигрывающая коалиция ($v(S) = 0$).

Наверное, первой серьезной попыткой применить методы математической теории игр для оценки политического влияния в процессе принятия решений является предложенная Шепли и Шубиком (1954) методика вычисления индексов влияния. Рассмотрим формулу (3.3) применительно к ситуации голосовательных (простых) игр, когда характеристическая функция $v(S)$ считается принимающей лишь два значения: 1 - для выигрывающей коалиции и 0 - для проигрывающей. Выражение в квадратных скобках из (3.3) оказывается равным нулю в случаях, когда выигрыш коалиции T не зависит от участия в ней игрока i . Разность, стоящая в квадратных скобках, не равна нулю, только если $v(T) = 1$, а $v(T - \{i\}) = 0$. То есть, она равна единице, только если игрок i

является решающим для коалиции T : с его участием коалиция T побеждает, без него проигрывает. Пусть W - множество выигрывающих коалиций, а L - множество проигрывающих коалиций. Тогда формулу (3.3) можно тогда записать как

$$\varphi_i[v] = \sum_{\substack{T \subseteq W \\ T \setminus \{i\} \subseteq L}} \frac{(t-1)!(n-t)!}{n!}$$

В этом случае значение Шепли трансформируется в индекс политического влияния (Шепли-Шубика), который будучи подсчитанным для игрока i , есть отношение числа упорядочений игроков, в которых голос игрока i оказывается решающим, к общему числу таких упорядочений. Индексы Шепли-Шубика могут принимать значения в интервале между 0 и 1, а их общая сумма всегда равна 1. Если индекс игрока равен 0, он не имеет никакого влияния на процесс принятия решений (нулевой игрок или "болван"), если индекс равен 1, то данный игрок полностью контролирует процесс принятия решений ("диктатор").

Пример 1. В качестве примера можно рассмотреть взвешенную мажоритарную игру трех игроков с весами $(w_1, w_2, w_3) = (2, 1, 1)$ и квотой большинства $q=2/3$. Например, это может быть совет из 3 директоров, где первый директор имеет 2 голоса, а остальные - по 1. Для принятия решения необходимо собрать не менее 3 голосов. Будем считать, что значениями выигрыша коалиции будут числа 1 (если коалиция обладает 3 или более голосами) и 0 (если голосов меньше, чем 3). В этой игре первый игрок обладает правом вето: он является необходимым участником любой выигрывающей коалиции, но не в состоянии обеспечить прохождение решения сам по себе. Все возможные перестановки игроков (порядок, в котором они присоединяются к коалиции) выглядят следующим образом (звездочкой помечены игроки, приносящие решающий голос):

1, 2*, 3

2, 1*, 3

3, 1*, 2

1, 3*, 2

2, 3, 1*

3, 2, 1*

Всего имеется $3! = 6$ перестановок игроков. Голос игрока 1 оказался решающим в четырех перестановках. Остальные имеют по одному решающему голосу. Таким образом, значения Шепли игроков 1, 2, 3 выражаются числами: $2/3$, $1/6$, $1/6$. Из примера видно, что значения Шепли во взвешенных мажоритарных играх могут существенно отличаться от соответствующих весов (количества голосов), выражая реальное влияние игроков (фракций парламента) на принятие решений. В качестве меры влиятельности значения Шепли выглядят достаточно убедительно и широко применяются в прикладных исследованиях.

Важную роль в теории значений Шепли играет носитель игры. Носителем называется такое множество игроков T , что для любой коалиции C будет выполнено: $v(C) = v(T \cap C)$. В последнем примере единственный носитель игры совпадает со множеством игроков N . Если игрок не входит в какой-либо носитель, то он является нулевым игроком или “болваном” - его значение Шепли равно нулю. Содержательно это означает, что он не способен увеличить выигрыш никакой коалиции и может быть вообще исключен из рассмотрения.

Пусть, например, парламент состоит из трех фракций всегда голосующих солидарно. Первая имеет 70 голосов, вторая - 20, и третья - 10. Для принятия решений требуется либо простое большинство (50% голосов), либо квалифицированное большинство ($2/3$ голосов). Первая фракция обладает необходимым большинством голосов во всех случаях. Следовательно она является диктатором - обладает всей полнотой власти в парламенте. Носителями такой игры являются все коалиции, содержащие игрока 1. В частности, множество, состоящее из одного первого игрока, является носителем. Две других фракции не входят в этот носитель, а

значит являются нулевыми игроками. Распределение значений Шепли в этом случае: (1, 0, 0).

Индекс Шепли-Шубика измеряет важность игрока в плане его участия в *принятии* или *поддержке* удобного ему решения. Можно поставить и двойственную задачу: выяснить какова влияние игрока в смысле *блокирования* неудобного ему решения. Оказывается, что решение этой задачи дает тот же самый результат: блокирующее влияние игрока тоже равно индексу Шепли-Шубика.

Другой тип индекса влияния (хотя и близкий по смыслу) был предложен юристом Банцхафом (1968). Идея его в том, что в голосовательной игре рассматривается множество всех минимальных выигрывающих коалиций. Минимальной выигрывающей коалицией является такая, которая при любом ее уменьшении превращается в проигрывающую. Любой участник минимальной выигрывающей коалиции является для нее важным или решающим: если он уйдет, коалиция сразу станет проигрывающей. Банцхаф предложил для каждого участника голосовательной игры подсчитывать число минимальных выигрывающих коалиций, в которые он входит. Это число характеризует политический вес игрока, зависимость от него других, и называется индексом Банцхафа. Чаще используют нормированный индекс Банцхафа:

$$\beta_i = \frac{b_i}{\sum_N b_j}$$

где b_j - число минимальных выигрывающих коалиций, в которые входит игрок j .

Пример 2. Рассмотрим ту же игру, что и в примере 1, и подсчитаем для игроков индексы Банцхафа. Выпишем все минимальные выигрывающие коалиции: {1,2}, {1,3}. (Коалиция {1, 2, 3} – не является минимальной выигрывающей: удаление из нее игрока 2 (или 3) оставляет ее выигрывающей). Подсчитаем, сколько раз каждый из игроков оказывается

членом минимальной выигрывающей коалиции: $b_1 = 2, \quad b_2 = b_3 = 1$.

Индексы Банцхафа игроков равны:

$$\beta_1 = \frac{2}{2+1+1} = \frac{1}{2}; \quad \beta_2 = \beta_3 = \frac{1}{4}$$

Задачи:

А) Оценить влияние игроков при помощи индекса Шепли-Шубика во взвешенных мажоритарных играх с квотой большинства 50% и весами игроков:

1) (1, 2, 3) 2) (3, 2, 2) 3) (4, 2, 1) 4) (2, 1, 1, 1)

Б) Оценить влияние игроков при помощи индекса Шепли-Шубика во взвешенных мажоритарных играх 1-4 с квотой большинства $2/3$.

В) Выполнить задания пунктов А) и Б) для индексов Банцхафа.

Использованная литература:

- Акимов В.П. (2000) Проблема распределения политического влияния и теория кооперативных игр. М: МГИМО(У), 82с..
- Беклемишев Д.В. (1974) Курс аналитической геометрии и линейной алгебры, М: Наука.
- Бугров Я.С., Никольский С.М. (1985) Высшая математика, М: Наука.
- Воробьев Н.Н. (1984) Основы теории игр. Бескоалиционные игры. М: Наука.
- Кудрявцев Л.Д. (1973) Математический анализ. Т. 1,2. Москва: «Высшая школа».
- Льюис Р., Райфа Х. (1961) Игры и решения. М.: Мир.
- Малыхин В.И. (1998) Математическое моделирование экономики, Москва, УРАО.
- Малыхин В.И. (1999) Математика в экономике. Москва: ИНФРА-М.
- Мулен Э. (1985) Теория игр с примерами из математической экономики. М.: Мир.
- Никитина Н.С., Степанов А.В. Математика в экономике. Москва: МГИМО(У).
- Петросян Л.А., Зенкевич Н.А., Семина Е.А. (1998) Теория игр. М: “Высшая школа”.
- Статистические методы для ЭВМ (по ред. Энслейна К. и др.) (1986) М: Наука.
- Фон Нейман Дж., Моргенштерн О. (1970) Теория игр и экономическое поведение. М: Наука.
- Owen, G. (1982). Game Theory, Acad.Press.
- Ordeshook, P.C. (1986) Game theory and political theory, Cambridge University Press, Cambridge