

Тема 6. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ И ЕГО СВОЙСТВА

Интеграл — одно из важнейших математических понятий. Он широко применяется во всех областях науки. Имеет мировоззренческое значение. Сначала рассмотрим его с чисто математической точки зрения.

Дифференцирование и интегрирование — взаимно обратные операции.

Как известно, *дифференцированием* называется отыскание производной данной, вообще говоря, произвольной функции. При этом производная имеет ясный механический смысл — если $s(t)$ есть зависимость пройденного пути от времени, то производная $s'(t)$ есть мгновенная скорость в момент t , производная же $(s'(t))'$, или 2-я производная $s''(t)$, есть ускорение в момент t .

Но можно поставить и обратную задачу: если известна зависимость ускорения $a(t)$ от времени, то как найти скорость в момент t . Или если известна скорость в каждый момент времени, то каков будет пройденный путь?

С чисто математической точки зрения класс данных задач таков: известна функция $f(x)$, как найти функцию $F(x)$, производная $F'(x)$ которой есть $f(x)$?

Определение. Функция $F(x)$ называется *первообразной функцией* для функции $f(x)$ или *интегралом* от $f(x)$, если $f(x)$ есть производная функции $F(x)$, то есть $f(x) = F'(x)$.

Отыскание для данной, вообще говоря, произвольной функции $f(x)$ ее первообразной называется *интегрированием* (а весь комплекс связанных с этим вопросов — *интегральным исчислением*). Как видим, эта задача является обратной по отношению к дифференцированию.

Прямая задача: дифференцирование $f(x) \rightarrow f'(x)$	Обратная задача: интегрирование $f(x) = F'(x) \rightarrow F(x)$
---	---

Итак, если $f(x) = F'(x)$, то $f(x)$ есть производная функции $F(x)$, а функция $F(x)$ есть первообразная функция для $f(x)$. Однако вместе с $F(x)$ первообразной функцией для $f(x)$ будет и любая функция $F(x) + C$, где C — константа, так как $(F(x) + C)' = F'(x) = f(x)$. Но, можно доказать, что этим и исчерпываются все первообразные функции для данной функции $f(x)$, т.е. любая первообразная функция для $f(x)$ имеет вид $F(x) + C$, где $F(x)$ — какая-то первообразная. Следовательно, для отыскания всех первообразных функций для $f(x)$ достаточно найти какую-нибудь одну, все остальные получаются добавлением всевозможных констант.

В силу этого выражение $F(x) + c$, где c — произвольная константа, а $F(x)$ — какая-то первообразная функция для $f(x)$, представляет собой общий вид функции, которая имеет производную $f(x)$. Это выражение называется *неопределенным интегралом $f(x)$* (или от $f(x)$) и обозначается $\int f(x)dx$; произведение $f(x)dx$ называется *подынтегральным выражением*, а $f(x)$ — *подынтегральной функцией*.

Пример 1. Так как $(x^4)' = 4x^3$, то $\int 4x^3 dx = x^4 + C$; так как $(\sin 3x)' = 3 \cos 3x$, то $\int 3 \cos 3x dx = \sin 3x + C$; так как $(e^x)' = e^x$, то $\int e^x dx = e^x + C$.

Отметим еще раз: непосредственно из определения неопределенного интеграла следует, что производная от него есть подынтегральная функция, т.е.

$$(0.1) \quad \left(\int f(x) dx \right)' = f(x)$$

Далее, если $F(x)$ — первообразная для $f(x)$, то $dF(x) = f(x)dx$, так что можно писать $d \int f(x)dx = f(x)dx$. С другой стороны, $\int dF(x) = F(x) + C$, так что знаки «d» и «∫», поставленные последовательно, почти сокращают друг друга.

Пример 2. Возвратимся к физической иллюстрации, где $s(t)$, $v(t)$, $a(t)$ — пройденный путь, скорость и ускорение тела, соответственно. С использованием знака интеграла теперь можно записать, что $s(t) = \int v(t)dt$; $v(t) = \int a(t)dt$. Проанализируем равноускоренное прямолинейное движение. Например, под действием силы тяжести, когда $a(t) = \text{const} = g$. Тогда $v(t) = gt + c$, где c — произвольная константа. Следовательно, данных пока недостаточно для определения скорости. Это ясно и из физических соображений. Чтобы фиксировать какое-то значение v , надо знать скорость в какой-то момент. Пусть $v(t_0) = v_0$, тогда $v_0 = gt_0 + c$. Следовательно, $c = v_0 - gt_0$ и получаем такой закон изменения скорости от времени: $v(t) = g(t - t_0) + v_0$. Далее

$$s(t) = \int v(t)dt = \int (g(t - t_0) + v_0)dt = \frac{1}{2}g(t - t_0)^2 + v_0t + c$$

Опять-таки c можно найти, задав значение пройденного пути в какой-то момент времени; пусть, например, $s(t_0) = s_0$, тогда $c = s_0 - v_0t$ и окончательно получаем:

$$s(t) = \frac{1}{2}g(t - t_0)^2 + v_0(t - t_0) + s_0$$

Значения v_0, s_0 условно называются начальными значениями скорости и пути в момент времени t_0 .

В общем виде для выбора конкретной первообразной можно указать значение F_0 которое она должна принять при $x = x_0$. Если $F(x) + c$ — неопределенный интеграл для $f(x)$, т.е. семейство всех первообразных, то, полагая $F(x_0) + c = F_0$ получаем $c = F_0 - F(x_0)$ и $F(x) + F_0 - F(x_0)$ — та самая конкретная первообразная, которая в точке x_0 принимает значение F_0 .

Пример 3. Определить первообразную для $2x$, которая равна 4 при $x = 2$.

Так как $\int 2x dx = x^2 + C$, то, полагая $2^2 + C = 4$, получаем $C = 0$. Значит, искомая первообразная есть x^2 .

Часто уточняют понятие первообразной, говоря, что функция $F(x)$ есть первообразная для функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ (интервале и т.п.), если $F'(x) = f(x)$ во всякой точке этого отрезка (в концевых точках речь идет, конечно, об односторонних производных).

Геометрическое понимание интеграла.

Рассмотрим в промежутке $[a, b]$ непрерывную функцию $y = f(x)$, принимающую лишь неотрицательные значения. Рассмотрим фигуру $ADCB$ (рис. 1), ограниченную кривой $f(x)$, двумя вертикальными прямыми: $x = a$ и $x = b$ и отрезком $[a, b]$ оси OX , т.е. $ADCB$ — криволинейная трапеция. Изучим поведение площади переменной фигуры $ADNM$, заключенной между постоянной вертикальной прямой $x = a$ и вертикальной прямой, отвечающей произвольно выбранному в промежутке значению x . При изменении x эта площадь будет изменяться, являясь функцией от x ; обозначим эту функцию $P(x)$.

Найдем производную этой функции. Действуя по общему правилу, придадим x некоторое приращение Δx ; тогда площадь P получит приращение ΔP .

Пусть m и M соответственно наименьшее и наибольшее значения $f(x)$ в промежутке $[x, x + \Delta x]$, тогда $m \cdot \Delta x \leq \Delta P \leq M \cdot \Delta x$, откуда $m \leq \frac{\Delta P}{\Delta x} \leq M$. При $\Delta x \rightarrow 0$, в силу непрерывности $f(x)$, m и M будут

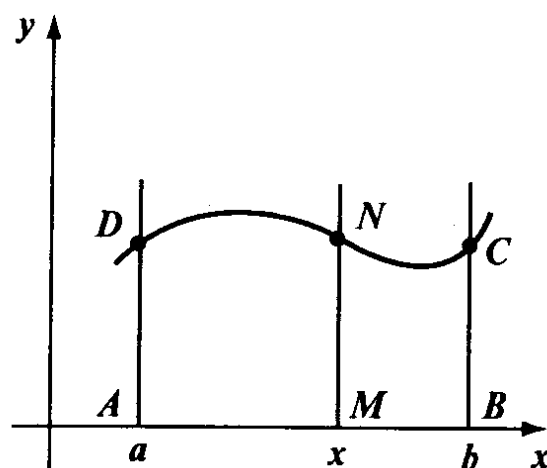


Рисунок 1

стремиться к $f(x)$, а тогда и $\frac{\Delta P}{\Delta x} \rightarrow f(x)$. Следовательно,

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta P}{\Delta x} = f(x)$$

Таким образом, справедлива замечательная теорема, обычно называемая *теоремой Ньютона-Лейбница*: производная от переменной площади $P(x)$ по абсциссе x равна ординате $y = f(x)$.

Иными словами, переменная площадь $P(x)$ есть первообразная функция для данной функции $f(x)$. Из других первообразных она отличается тем, что $P(a) = 0$. Любая другая первообразная $F(x)$ для $f(x)$ отличается от $P(x)$ только на константу.

Следовательно, площадь криволинейной трапеции $ADCB$ равна

$$P(b) = P(b) - P(a) = (F(b) + C) - (F(a) + C) = F(b) - F(a)$$

где $F(x)$ — какая угодно первообразная для $f(x)$.

Пример 4. Найдём площадь $P(x)$ фигуры, ограниченной параболой $y = x^2$, осью OY и вертикальной прямой с абсциссой x (рис. 9).

Для функции x^2 первообразная есть, например, $\frac{x^3}{3}$,

следовательно, искомая площадь равна $P(x) = \frac{x^3}{3} - 0 = \frac{x^3}{3}$.

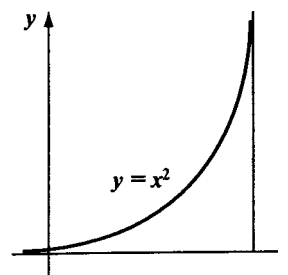


Рисунок 2

Еще одно геометрическое понимание интеграла состоит в следующем. Как известно, значение производной в точке есть тангенс угла наклона касательной. Поэтому найти для функции $f(x)$ первообразную, значит, найти такую функцию $F(x)$, касательная к графику которой в точке x имеет тангенс угла наклона $f(x)$.

Таблица основных интегралов.

Каждая формула дифференциального исчисления, устанавливающая, что для некоторой функции $F(x)$ производная есть $y(x)$, дает и формулу интегрального исчисления:

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

Взяв известные формулы дифференцирования, и прочитав их «задом наперед», получим следующие правила интегрирования (с небольшими естественными изменениями):

1. $\int 0dx = C;$

2. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ (предполагается, что $n \neq -1$;

3. $\int x^{-1} dx = \int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C$ $\int \frac{1}{x+a} dx = \ln |x+a| + C$

4. $\int e^x dx = e^x + C;$

5. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C;$

6. $\int \cos x \cdot dx = \sin x + C;$

7. $\int \sin x \cdot dx = -\cos x + C$

8. $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C$

9. $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C$

К этим формулам добавим еще пять, требующихся довольно часто:

10. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C;$ $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$

11. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C \quad (a \neq 0)$ («высокий» логарифм);

$$12. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 + a^2} \right| + C \quad (a \neq 0) \text{ («длинный» логарифм);}$$

$$13. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 - a^2} \right| + C \quad (a \neq 0)$$

$$14. \int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \arcsin x + C \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{|a|} + C$$

Пример 5. а) $\int \sqrt{x} dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx$. Применив формулу (2), получим $\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + C$;

б) $\int e^{3x} dx = \int (e^3)^x dx$. Применяя формулу (5) получим: $\frac{(e^3)^x}{\ln e^3} + C = \frac{e^{3x}}{3} + C$.

Простейшие правила интегрирования.

1. Если k — постоянная и $k \neq 0$, то $\int kf(x)dx = k \int f(x)dx$.

Действительно, согласно правилам дифференцирования, производная правой части равна $\left(k \int f(x)dx \right)' = kf(x)$, что и требовалось доказать.

Таким образом, постоянный множитель можно выносить из-под знака интеграла.

2. $\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$.

Опять, дифференцируя выражение справа, получаем подынтегральную функцию слева, что и требовалось доказать. Следовательно, неопределенный интеграл от суммы (разности) функций равен сумме (разности) интегралов от этих функций.

3. Если $\int f(x)dx = F(x) + C$, то $\int f(ax + b)dx = \frac{1}{a} F(ax + b) + C$.

Действительно, исходное соотношение означает, что $F'(x) = f(x)$. Но

тогда $\left(\frac{1}{a} F(ax + b) + C \right)' = f(ax + b)$, что и требовалось доказать.

В частном случае, когда $a = 1$ или $b = 0$, имеем:

$$\int f(x+b)dx = F(x+b) + C, \quad \int f(ax)dx = \frac{1}{a}F(ax) + C.$$

Пример 6. Вычислим несколько интегралов, пользуясь только что изложенными правилами:

$$\text{а) } \int (3x^2 - 2x + 7)dx = \int 3x^2 dx - \int 2x dx + \int 7 dx = x^3 - x^2 + 7x + C;$$

$$\text{б) } \int \sin^2 x dx = \int \frac{(1 - \cos 2x)}{2} dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + C;$$

$$\text{в) } \int \frac{\sqrt{x}-1}{x} dx = \int x^{-0,5} dx - \int \frac{1}{x} dx = 2x^{0,5} - \ln|x| + C = 2\sqrt{x} - \ln|x| + C \quad (\text{в данном}$$

случае использовано почленное деление подынтегрального выражения);

$$\text{г) } \int \frac{x^2+2}{x^2+1} dx = \int \frac{(x^2+1)+1}{x^2+1} dx = \int \left(1 + \frac{1}{x^2+1}\right) dx = x + \arctg x + C. \quad (\text{Использовано}$$

выделение целой части в подынтегральном выражении)

Интегрирование путем замены переменной.

В основе этого метода лежит следующее замечание. Если $\int g(t)dt = G(t) + C$, то

$$(0.2) \quad \int g(f(x))f'(x)dx = G(f(x)) + C$$

Действительно, это прямо вытекает из правила дифференцирования сложной функции: $(G(f(x)) + C)' = G'_f(f(x))f'(x) = g(f(x))f'(x)$.

Пусть требуется вычислить интеграл $\int f(x)dx$. Если удастся в качестве новой переменной выбрать такую функцию от x : $t=g(x)$, чтобы подынтегральное выражение приняло вид $f(x)dx \rightarrow h(g(x))g'(x)dx$, где $h(t)$ — более удобная для интегрирования функция, тогда, как указано выше, достаточно найти интеграл $\int h(t)dt = H(t) + C$, чтобы из него подстановкой $t=g(x)$ получить искомый интеграл.

Пример 7. а) Найдем интеграл $\int \sin^2 x \cdot \cos x \cdot dx$

Поскольку $d(\sin x) = \cos x \, dx$, то интеграл принимает вид $\int \sin^2 x \cdot d(\sin x)$, и в качестве новой переменной естественно выбрать синус. Имеем:

$$t = \sin x, \quad dt = \cos x \cdot dx$$

$$\int \sin^2 x \cdot \cos x \cdot dx = \int t^2 dt = \frac{t^3}{3} + C = \frac{\sin^3 x}{3} + C$$

$$\text{б) } \int (3x - 5)^{10} dx = ?$$

$$t = 3x - 5, \quad dt = (3x - 5)' dx = 3 dx \Rightarrow dx = \frac{dt}{3}$$

$$\int (3x - 5)^{10} dx = \frac{1}{3} \int t^{10} dt = \frac{t^{11}}{33} + C = \frac{(3x - 5)^{11}}{33} + C$$

$$\text{в) } \int \frac{x^7 dx}{\sqrt{1 - x^{16}}} = ? \quad t = x^8, \quad dt = 8x^7 dx \Rightarrow x^7 dx = \frac{dt}{8}$$

$$\int \frac{x^7 dx}{\sqrt{1 - x^{16}}} = \frac{1}{8} \int \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}} = \frac{1}{8} \arcsin t + C = \frac{1}{8} \arcsin x^8 + C$$

Интегрирование по частям.

Пусть $u = f(x)$, $v = g(x)$ — функции от x , имеющие непрерывные производные $u' = f'(x)$ и $v' = g'(x)$. Тогда по правилу дифференцирования произведения

$$(uv)' = u'v + uv' \quad \text{или} \quad uv' = (uv)' - u'v$$

Интегрируя последнее равенство, и, учитывая, что $\int (uv)' dx = uv$, получаем

$$(0.3) \quad \int uv' dx = uv - \int u'v dx$$

Эта формула выражает правило интегрирования по частям.

Пример 8. а) Пусть требуется найти интеграл $\int x e^x dx$. Положим, $u = x$,

$v' = e^x$, тогда $v = e^x$, $u' = 1$. По формуле (0.3) имеем:

$$\int x e^x dx = x e^x - \int 1 \cdot e^x dx = x e^x - e^x + C.$$

6) Пусть требуется найти интеграл $\int \ln x dx$. Положим, $u = \ln x$, $v' = 1$, тогда $v = x$, $u' = \frac{1}{x}$. По формуле (0.3) имеем:

$$\int \ln x dx = x \cdot \ln x - \int x \frac{1}{x} dx = x \cdot \ln x - x + C$$

Заметим, наконец, что существует еще много формул и приемов интегрирования различных функций и составлены весьма обширные таблицы интегралов, т.е. первообразных.

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ 9.

- 1) $\int \left(2x + \frac{1}{x}\right)^2 dx$ (Предварительно возведите скобку в квадрат)
- 2) $\int (2 - \sqrt{x})^2 dx$ (Перейти к дробным показателям и возвести скобку в квадрат)
- 3) $\int \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 dx$
- 4) $\int (1 + \sqrt{x})(1 + \sqrt[3]{x}) dx$ (Перемножить скобки)
- 5) $\int \frac{1-x^2}{x} dx$ (Почленно поделить)
- 6) $\int \frac{x^2}{x^2+1} dx$ (Использовать выделение целой части)
- 7) $\int \frac{x^2+2x+3}{x+1} dx$ (Аналогично)
- 8) $\int (1 + \sin x + \cos x) dx$
- 9) $\int (e^x + \sin 4x) dx$
- 10) $\int (2\sin^2 x + 4\cos^2 x) dx$ (Использовать основное тригонометрическое тождество и формулу понижения степени)

11) $\int \operatorname{tg} x \, dx$ (Перейти к синусу и косинусу и осуществить замену переменной)

12) $\int \frac{dx}{2 + \cos^2 x} \quad \left(\left| x \right| < \frac{\pi}{2} \right)$ (Использовать равенство $2 = 2(\sin^2 x + \cos^2 x)$,

разделить числитель и знаменатель на $\cos^2 x$, использовать замену $t = \operatorname{tg} x$.)

13) $\int (4x - 3)^7 \, dx$ (Использовать замену переменной)

14) $\int \frac{x^2}{\sqrt{1 - x^2}} \, dx$ (Использовать замену переменной)

15) $\int \frac{x \, dx}{4 - x^2}$ (Использовать замену переменной)

16) $\int \frac{2x \, dx}{4 + x^4}$ (Использовать замену переменной)

17) $\int x^2 \sqrt[3]{1 + x^3} \, dx$ (Использовать замену переменной)

18) $\int \frac{x \, dx}{(1 + x^2)^2}$ (Использовать замену переменной)

19) $\int \frac{x^3 \, dx}{x^8 - 9}$ (Использовать замену переменной)

20) $\int 2x e^{-x^2} \, dx$

21) $\int \frac{e^x \, dx}{2 + e^x}$

22) $\int \frac{\ln x \, dx}{x}$

23) $\int \frac{\operatorname{arctg}^2 x \, dx}{1 + x^2}$

24) $\int \arcsin x \, dx$ (По частям)

25) $\int \operatorname{arctg} x \, dx$ (По частям)

26) $\int x e^{-x} \, dx$ (По частям)

$$27) \int x \sin x dx \quad (\text{По частям})$$

$$28) \int x \cos x dx \quad (\text{По частям})$$

$$29) \int x^2 e^x dx \quad (\text{По частям})$$

$$30) \int x^2 \cos x dx \quad (\text{По частям})$$

Ответы:

$$1) \frac{4}{3}x^3 + 4x - \frac{1}{x} + C;$$

$$2) 4x - \frac{8}{3}x\sqrt{x} + \frac{x^2}{2} + C$$

$$3) x + 4\sqrt{x} + \ln|x| + C$$

$$4) x + \frac{2}{3}x^{1,5} + 0,75x^{\frac{4}{3}} + \frac{6}{7}x^{\frac{7}{6}} + C$$

$$5) \ln|x| - \frac{x^2}{2} + C$$

$$6) x - \operatorname{arctg} x + C$$

$$7) \frac{(x+1)^2}{2} + 2\ln|x+1| + C$$

$$8) x - \cos x + \sin x + C$$

$$9) e^x - 0,25\cos 4x + C$$

$$10) 3x + \frac{1}{2}\sin 2x + C$$

$$1) -\ln|\cos x| + C$$

$$2) \frac{1}{\sqrt{6}} \operatorname{arctg} \left(\frac{\sqrt{2} \operatorname{tg} x}{\sqrt{3}} \right) + C$$

$$3) \frac{(4x-3)^8}{32} + C$$

$$4) \frac{\arcsin x}{2} - \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} + C$$

$$5) -\frac{\ln|x^2-4|}{2} + C$$

$$6) \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{2} + C$$

$$7) \frac{1}{4} \sqrt[3]{(1+x^3)^4} + C$$

$$8) -\frac{1}{2(1+x^2)} + C$$

$$9) \frac{1}{24} \ln \left| \frac{x^4-3}{x^4+3} \right| + C$$

$$10) -e^{-x^2} + C$$

$$11) \ln(e^x + 2) + C$$

$$12) 0,5 \ln^2 x + C$$

$$13) \frac{\operatorname{arctg}^3 x}{3} + C$$

$$14) x \cdot \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$$

$$15) x \cdot \operatorname{arctg} x - \frac{\ln(x^2+1)}{2} + C$$

$$16) -e^{-x}(x+1) + C$$

$$17) -x \cos x + \sin x + C$$

$$18) \cos x + x \sin x + C$$

$$19) e^x(x^2 - 2x + 2) + C$$

$$20) 2x \cos x - 2 \sin x + x^2 \sin x + C \text{ Equation Section (Next)}$$

Тема 7. Определенный интеграл

1. Площадь криволинейной трапеции. Вернемся к задаче определения площади криволинейной трапеции (см. тему 6).

Пусть на промежутке $[a, b]$ определена неотрицательная функция $y = f(x)$. Рассмотрим фигуру $ADCB$ (рис. 1), ограниченную кривой $f(x)$, двумя вертикальными прямыми $x=a$ и $x=b$ и отрезком $[a, b]$ оси OX , т.е. криволинейную трапецию.

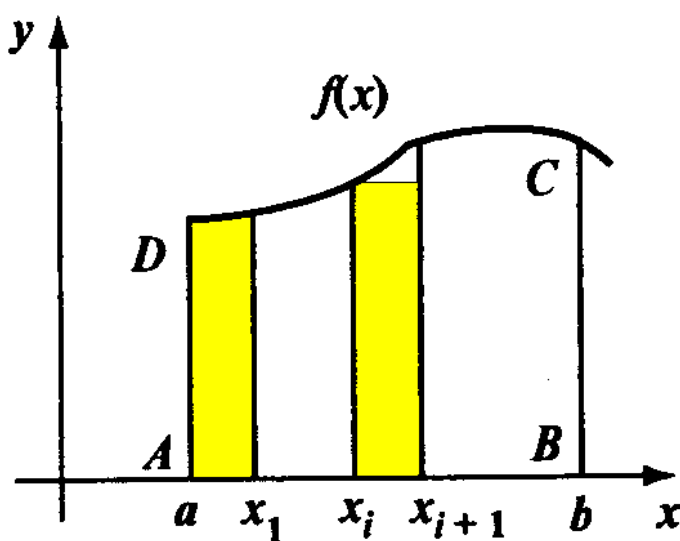


Рисунок 3 Иллюстрация понятия определенного интеграла

Разделим основание AB трапеции на несколько частей точками $a = x_0 < x_1 < \dots < x_i < \dots < x_n = b$ и проведем в точках деления вертикальные отрезки. В результате трапеция разделится на несколько вертикальных полосок (см. рис. 1). Заменяем каждую полоску прямоугольником с тем же основанием и высотой, совпадающей с одной из ординат полоски, например с самой левой. Сама криволинейная трапеция заменится при этом ступенчатой фигурой, составленной из прямоугольников. Тогда площадь полоски окажется приближенно равной площади заменяющего ее прямоугольника, а площадь всей трапеции — площади этой ступенчатой фигуры.

Основание i -го прямоугольника равно $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$, так что его площадь равна $f(x_i)\Delta x_i$, а площадь всей ступенчатой фигуры равна $\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\Delta x_i$. Итак, площадь S самой криволинейной трапеции приближенно равна $\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\Delta x_i$. При безграничном убывании всех Δx_i к нулю погрешность этого равенства также стремится к нулю и точное значение площади S получается как предел

$$(1.1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\Delta x_i$$

при стремлении всех Δx_i к нулю.

Для обозначения пределов вида (1.1) был введен символ $\int f(x)dx$. Так как площадь, представляющая это предельное значение, есть в то же время и первообразная для функции $f(x)$, (см. тему 5), то этим же символом стали обозначать и первообразную функции $f(x)$. Чтобы подчеркнуть, что речь идет о площади трапеции от a до b , стали писать $\int_a^b f(x)dx$. Число a называется **нижним пределом интегрирования**, а число b — **верхним пределом интегрирования**.

Определение определенного интеграла.

Пусть на промежутке $[a;b]$ задана функция $f(x)$. Будем считать функцию непрерывной, хотя это не обязательно. Разобьем, как и ранее, промежуток $[a;b]$ произвольными числами x_i ($a < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < b$) на n более мелких промежутков Δx_i . На каждом из этих промежутков выберем произвольно по одной точке: $c_i \in \Delta x_i, i = 1, \dots, n$.

Составим сумму:

$$\sigma = \sum_{i=1}^n f(c_i)\Delta x_i$$

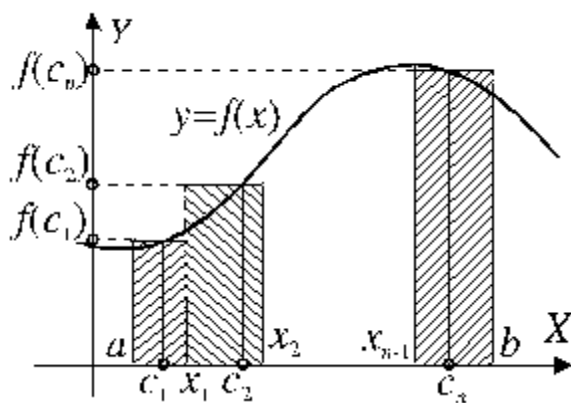


Рисунок 4 Понятие интегральной суммы

Она называется **интегральной суммой** функции $f(x)$ по промежутку $[a;b]$. Очевидно, что интегральная сумма зависит от способа разбиения промежутка и от выбора точек c_i .

Каждое слагаемое интегральной суммы представляет собой площадь прямоугольника, покрытого штриховкой на рисунке 2.

Введем обозначение:

$\lambda = \max(\Delta x_i), \quad i = 1, 2, \dots, n..$ Величину λ иногда называют параметром разбиения.

Рассмотрим процесс, при котором число точек разбиения неограниченно возрастает таким образом, что величина λ стремится к нулю. **Определенным интегралом**

$$I = \int_a^b f(x) dx$$

от функции $f(x)$ по промежутку $[a;b]$ называется предел, к которому стремится интегральная сумма при этом процессе, если предел существует.

$$I = \lim_{\lambda \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)} \sigma$$

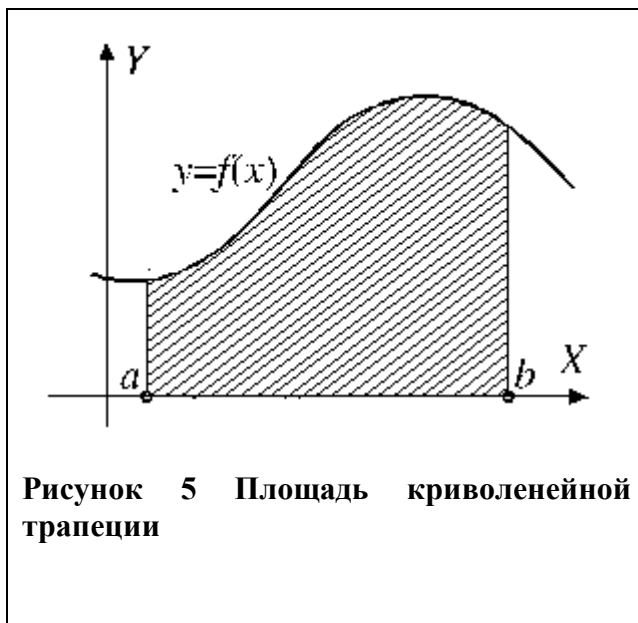
Если такой предел существует, то он не зависит от первоначального разбиения промежутка $[a;b]$ и выбора точек c_i .

Рассмотрим фигуру, ограниченную графиком непрерывной, неотрицательной на промежутке $[a;b]$ функции $f(x)$, отрезком $[a;b]$ оси X , и прямыми $x = a; x = b$. Такую фигуру называют криволинейной трапецией. На рисунке 3 криволинейная трапеция выделена штриховкой. Площадь S этой трапеции определяется формулой

$$S = I = \int_a^b f(x) dx$$

Если $f(x) < 0$ во всех точках промежутка $[a; b]$ и непрерывна на этом промежутке (например, как изображено на рисунке 4), то площадь криволинейной трапеции, ограниченной отрезком $[a; b]$ горизонтальной оси координат, прямыми $x = a$; $x = b$ и графиком функции $y = f(x)$, определяется формулой

$$S = -\int_a^b f(x) dx$$



При фиксированных пределах определенный интеграл есть постоянное число.

Приведенное выше определение определенного интеграла принадлежит Риману, из-за чего этот интеграл и называется римановым. Существуют и другие конструкции интегралов. Нам они не понадобятся.

Описанная схема определения определенного интеграла используется для его приближенного вычисления. Отрезок интегрирования проходится с каким-то шагом h и находится значение интегральной суммы $\sigma = \sum_{i=1}^n f(x_i)h$.

Это и есть приближенное значение интеграла. Для получения более точного значения надо уменьшить шаг h .

Перечислим свойства определенного интеграла:

1. $\int_a^b kf(x)dx = k \int_a^b f(x)dx$ (здесь k - произвольное число);
2. $\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$
3. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$
4. Если $c \in [a; b]$, то $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

Из 4-го свойства следует, например, что $\int_0^{2\pi} \sin x dx = 0$.

Все приведенные выше свойства непосредственно следуют из определения определенного интеграла.

Определенный интеграл как функция верхнего предела.

Пусть функция $f(t)$ определена и непрерывна на некотором промежутке, содержащем точку a . Тогда каждому числу x из этого промежутка можно поставить в соответствие число

$$I(x) = \int_a^x f(t) dt,$$

определив тем самым на промежутке функцию $I(x)$, которая называется определенным интегралом с переменным верхним пределом. Отметим, что в точке $x = a$ эта функция равна нулю.

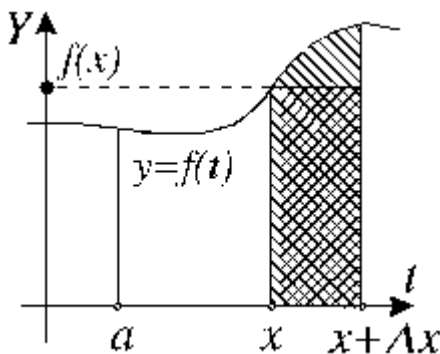


Рисунок 7 Интеграл с переменным пределом

Вычислим производную этой функции в точке x . Для этого сначала рассмотрим приращение функции в точке x при приращении аргумента Δx .

$$\begin{aligned} \Delta I(x) &= I(x + \Delta x) - I(x) = \\ &= \int_a^{x+\Delta x} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt = \end{aligned}$$

$$= \int_a^x f(t) dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt = \int_x^{x+\Delta x} f(t) dt$$

Как показано на рисунке, величина последнего интеграла в формуле для приращения $\Delta I(x)$ равна площади криволинейной трапеции, отмеченной штриховкой. При малых величинах Δx (здесь, так же как и везде в этом курсе, говоря о малых величинах приращений аргумента или функции, имеем в виду абсолютные величины приращений, так как сами приращения могут быть и положительными и отрицательными) эта площадь оказывается приблизительно равной площади прямоугольника, отмеченного на рисунке двойной штриховкой. Площадь прямоугольника определяется формулой $f(x)\Delta x$. Отсюда получаем соотношение:

$$\Delta I(x) = \int_x^{x+\Delta x} f(t) dt \approx f(x) \Delta x$$

В последнем приближенном равенстве точность приближения тем выше, чем меньше величина Δx .

Из сказанного следует формула для производной функции $I(x)$:

$$I'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta I(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x) \Delta x}{\Delta x} = f(x)$$

Производная определенного интеграла по верхнему пределу в точке x равна значению подынтегральной функции в точке x . Отсюда следует, что функция $I(x) = \int_a^x f(t) dt$ является первообразной для функции $f(x)$, причем такой первообразной, которая принимает в точке $x = a$ значение, равное нулю. Этот факт дает возможность представить определенный интеграл в виде:

$$(1.2) \quad \int_a^x f(t) dt = I(x) - I(a)$$

Пусть $F(x)$ тоже является первообразной для функции $f(x)$, тогда по теореме об общем виде всех первообразных функции $I(x) = F(x) + C$, где C - некоторое число. При этом правая часть формулы (1.2) принимает вид:

$$(1.3) \quad I(x) - I(a) = F(x) + C - (F(a) + C) = F(x) - F(a)$$

Из формул (1.2) и (1.3) после замены x на b следует формула для вычисления определенного интеграла от функции $f(t)$ по промежутку $[a; b]$:

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a),$$

которая называется формулой **Ньютона-Лейбница**. Здесь $F(x)$ - любая первообразная функции $f(x)$.

Для того, чтобы вычислить определенный интеграл от функции $f(x)$ по промежутку $[a; b]$, нужно найти какую-либо первообразную $F(x)$ функции $f(x)$ и подсчитать разность значений первообразной в точках b и a . Разность этих

значений первообразной принято обозначать символом $F(x) \Big|_a^b$.

Приведем примеры вычисления определенных интегралов с помощью формулы Ньютона-Лейбница.

$$1. \quad I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin \frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1.$$

$$2. \quad I_2 = \int_0^1 x e^x dx.$$

Сначала вычислим неопределенный интеграл от функции $f(x) = x e^x$.

Используя метод интегрирования по частям, получаем: $\int x e^x dx = e^x (x - 1) + C$.

В качестве первообразной функции $f(x)$ выберем функцию $e^x (x - 1)$ и применим формулу Ньютона-Лейбница:

$$I = e^x (x - 1) \Big|_0^1 = 1.$$

При вычислении определенных интегралов можно применять **формулу замены переменной в определенном интеграле**:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt.$$

Здесь α и β определяются, соответственно, из уравнений $\varphi(\alpha) = a$; $\varphi(\beta) = b$, а функции f , φ , φ' должны быть непрерывны на соответствующих промежутках.

Пример: $I = \int_1^e \frac{\ln x dx}{x}$.

Сделаем замену: $\ln x = t$ или $x = e^t$, тогда если $x = 1$, то $t = 0$, а если $x = e$, то $t = 1$. В результате получим:

$$I = \int_0^1 \frac{\ln e^t e^t dt}{e^t} = \int_0^1 t dt = \frac{t^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{1}{2}.$$

При замене переменной в определенном интеграле не нужно возвращаться к исходной переменной интегрирования.

Пример: Кривая Лоренца и Коэффициент Джини.

Для определения степени неравенства в распределении доходов населения используется так называемая кривая Лоренца – зависимость доли совокупного дохода от доли имеющего его населения (население при этом упорядочивается по своим доходам в возрастающем порядке от беднейших к самому богатому).

Пусть $x \in [0,1]$ и выражает некоторую долю самых бедных семей общества, а функция $L(x)$ выражает долю общественного богатства, которой обладают эти семьи. Если бы распределение богатства было равномерным, то график функции $L(x)$ шел бы по диагонали единичного квадрата. Поэтому чем больше площадь линзы, обозначенной на рисунке 6 буквой А, тем неравномернее распределено богатство в обществе. Кривая $y=L(x)$ называется кривой Лоренса. А коэффициентом Джини называется число:

$$G = \frac{A}{A+B} = 2A = 1 - 2B$$

дающее численную оценку неравенства в распределении доходов рассматриваемого множества семей.

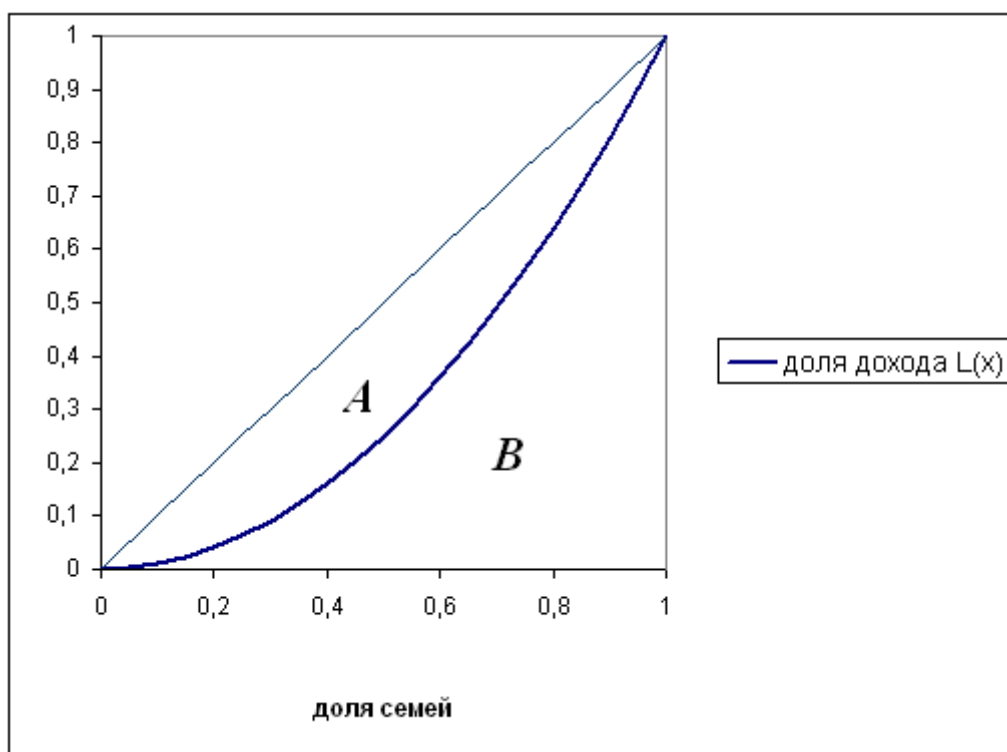


Рисунок 8

Пусть, например, $L(x) = x^2$. Тогда площадь фигуры, обозначенная буквой В равна

$$B = \int_0^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{1}{3}$$

Тогда коэффициент Джини равен

$$G = 1 - 2B = \frac{1}{3}$$

В России коэффициент Джини в 1989 году составлял 0,24, а в 1993 году вырос до 0,496. Другие примеры значений коэффициентов Джини в 1993 году: Германия – 0,25, Япония – 0,27, Великобритания – 0,297, США - 0,329, Малайзия – 0,484, Мексика - 0,503¹.

¹ Экономика Российской Федерации, Уч. Пособие под ред. В.К. Ломакина, МГИМО, 1999, с.7.

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ 10.

1) $\int_{-1}^2 x^3 dx$

2) $\int_{-1}^1 \sqrt[3]{x} dx$

3) $\int_1^2 (x^2 - 2x + 3) dx$

4) $\int_0^{\pi} \sin x dx$

5) $\int_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}$

6) $\int_0^2 2^x dx$

7) $\int_e^{e^2} \frac{dx}{x \ln x}$

8) $\int_3^4 \frac{x^2 + 3}{x - 2} dx$

9) $\int_1^e \frac{dx}{x(1 + \ln^2 x)}$

10) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^3 x dx$

Ответы:

1) $15/4$; 2) 0 ; 3) $7/3$; 4) 2 ; 5) $\frac{\pi}{6}$; 6) $3/\ln 2$; 7) $\ln 2$; 8) $11/2 + 7 \ln 2$; 9) $\frac{\pi}{4}$;

10) $5\sqrt{2}/12$

Equation Section (Next) Тема 8. Дифференциальные уравнения.

Дифференциальными уравнениями называются уравнения, в которых неизвестными являются функции одной или нескольких переменных, и в уравнения входят не только сами функции, но и их производные. Если производные, входящие в уравнение, берутся только по одной переменной, то дифференциальное уравнение называется **обыкновенным**. Если в уравнении встречаются производные по нескольким переменным, то уравнение называется **уравнением в частных производных**. Мы будем рассматривать лишь обыкновенные дифференциальные уравнения.

Начнем с дифференциальных уравнений **первого порядка**. Это уравнения, в которые входит лишь первая производная неизвестной функции. Это уравнение может быть записано в виде

$$(2.1) \quad F(x, y, y') = 0.$$

Здесь x - независимая переменная, y - её неизвестная функция, y' производная функции y , F - заданная функция трех переменных. Функция F может быть задана не для всех значений её аргументов, поэтому можно говорить об области B определения функции F координатного пространства, то есть о множестве точек координатного пространства трех переменных x, y, y' .

Приведем примеры дифференциальных уравнений первого порядка:

$$1. y' - x^4 = 0; \quad 2. x \sin y' - \ln y = 0; \quad 3. x \cos y + (y' - y^2) \sin x = 0.$$

Решением уравнения (2.1) называется такая функция $y = \varphi(x)$, определенная на некотором промежутке (x_1, x_2) , что при подстановке её вместо y в уравнение (2.1) получается верное равенство на всем промежутке (x_1, x_2) . Очевидно, что подстановка $y = \varphi(x)$ возможна только тогда, когда функция $\varphi(x)$ на промежутке (x_1, x_2) имеет первую производную. Необходимо также, чтобы при любом значении переменной x из промежутка (x_1, x_2) точка

с координатами x, y, y' принадлежала множеству B , на котором определена функция F . Совокупность всех решений дифференциального уравнения называется его **общим решением**.

В некоторых случаях уравнение (2.1) определяет переменную y' как функцию независимых переменных x и y :

$$(2.2) \quad y' = f(x, y)$$

Тогда дифференциальное уравнение (2.2) равносильно дифференциальному уравнению (2.1) и называется **разрешенным относительно производной**.

Рассмотрим свойства решений уравнения (2.2). Введем в рассмотрение координатную плоскость XY переменных x и y . Мы будем рассматривать лишь такие уравнения, у которых **область определения правой части есть некоторая открытая область G в плоскости XY** (область называется открытой, если каждая точка входит в неё вместе с некоторой своей окрестностью). Пусть функция $y = \varphi(x)$ – решение уравнения (2.2). Тогда график этой функции называется **интегральной линией** или **интегральной кривой**. Эта кривая лежит в области G . Если точка (x_0, y_0) принадлежит области G , то интегральная кривая проходит через эту точку. Интегральная кривая в рассматриваемой точке имеет касательную, угловой коэффициент которой равен

$$\varphi'(x_0) = f(x_0, \varphi(x_0))$$

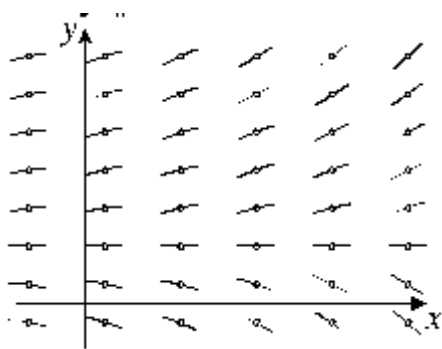


Рисунок 9 Поле направлений

Таким образом в каждой точке области G можно установить положение касательной к графику решения уравнения (2.2), проходящему через эту точку.

Можно себе представить, что в каждой точке области G построен короткий отрезок касательной к интегральной кривой,

проходящей через эту точку. Тогда получится чертеж, который называется **полем направлений**, задаваемым уравнением (2.2). Пример приведен на рисунке 9. Таким образом, каждое дифференциальное уравнение вида (2.2) задает на плоскости XY в области G поле направлений. Интегральные линии этого уравнения касаются направления, задаваемого полем в этой точке.

Если в уравнении (2.2) $f(x,y) = f_1(x)f_2(y)$, то такое уравнение называется **уравнением с разделяющимися переменными**. Его общий вид:

$$\frac{dy}{dx} = f_1(x)f_2(y)$$

Предполагая, что $f_2(y) \neq 0$, преобразуем последнее уравнение:

$$\frac{dy}{f_2(y)} = f_1(x)dx$$

В обеих частях полученного уравнения стоят дифференциалы некоторых функций аргумента x . Из равенства дифференциалов этих функций следует, что сами функции отличаются одна от другой на константу.

Применим изложенный метод к задаче об эффективности агитации.

Пусть некоторой политической партией ведется предвыборная кампания, в ходе которой она распространяет агитационную информацию о кандидате К. Пусть в момент времени $t = 0$ в результате агитационных действий информацию о кандидате получили x_0 человек из общего числа N потенциальных избирателей. Далее эта информация распространяется посредством общения людей, и в момент времени $t > 0$ число владеющих информацией людей равно $x(t)$. Сделаем предположение, что скорость роста числа владеющих информацией людей пропорциональна как числу осведомлённых в данный момент избирателей, так и числу неосведомлённых избирателей. Это приводит к дифференциальному уравнению

$$\frac{dx}{dt} = kx(N - x).$$

Здесь k – положительный коэффициент пропорциональности. Из уравнения получаем равенство дифференциалов двух функций аргумента t :

$$\frac{dx}{x(N-x)} = kdt.$$

Интегрируя левую и правую части, находим общее решение дифференциального уравнения:

$$\frac{1}{N} \ln \frac{x}{N-x} = kt + C$$

В общее решение входит неопределенная константа C . Полагая $NC = D$, получим равенство:

$$x/(N-x) = e^{Nkt + D},$$

из которого определим функцию $x(t)$:

$$x = \frac{N}{1 + Ee^{-Nkt}}.$$

Здесь $E = e^{-D}$. Такого вида функция называется логистической, а её график – логистической кривой.

Если теперь учесть, что $x(0) = x_0$ и положить $x_0 = N/\alpha$, где $\alpha > 0$, то можно найти значение константы E . Логистическая функция примет вид:

$$x = \frac{N}{1 + (\alpha - 1)e^{-Nkt}}.$$

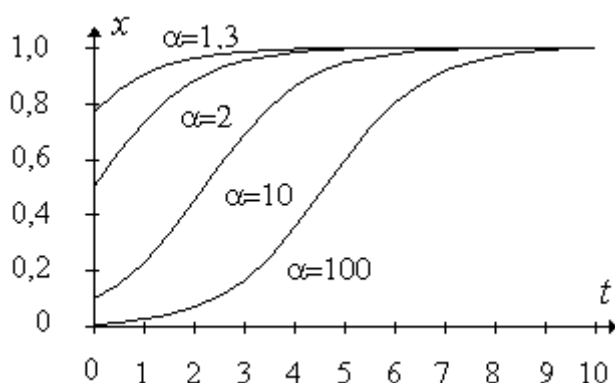


Рисунок 10 Логистические кривые

На рисунке 10 приведены примеры логистических кривых, полученных при различных

значениях α . Здесь величина N условно принималась за 1, а величина k бралась равной 0,5.

С помощью логистической функции описываются многие экономические, социальные, технологические и биологические процессы, например, постоянный рост продаж, распространение слухов, распространение технических новшеств, рост популяции определенного вида животных и др.

Линейным дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение:

$$(2.3) \quad a_0(x)y' + a_1(x)y = B(x).$$

При $a_0 \neq 0$ его можно представить в виде:

$$(2.4) \quad y' + a(x)y = b(x),$$

где $a(x) = a_1(x)/a_0(x)$ и $b(x) = B(x)/a_0(x)$.

Если правые части (2.3) и (2.4) равны нулю, то эти уравнения называются **однородными**, в противном случае – **неоднородными**.

Если в уравнении (2.3) $a_0(x) = a_0$ и $a_1(x) = a_1$, то есть эти функции являются константами, то уравнение (2.3) называется **линейным дифференциальным уравнением первого порядка с постоянными коэффициентами**.

Рассмотрим однородное уравнение

$$(2.5) \quad y' + ay = 0.$$

Перепишем его в виде: $\frac{dy}{dx} = -ay$ или $\frac{dy}{y} = -adx$. **Последнюю формулу**

можно рассматривать как равенство дифференциалов функций одного и того же аргумента x . Интегрируя это равенство, получаем:

$$\ln|y| = -ax + C \Rightarrow |y| = e^{-ax+C} \Rightarrow y = \pm e^C \cdot e^{-ax}$$

где C - произвольная константа. Если теперь ввести обозначение $\pm e^C = A$, то можно представить так называемое **общее решение** уравнения (2.5) в виде:

$$(2.6) \quad y = Ae^{-ax}.$$

Это решение зависит от неопределенной константы A , придавая которой различные значения, можно получить все множество интегральных кривых уравнения (2.5). Если мы хотим найти интегральную кривую, проходящую через точку (x_1, y_1) , то нужно подставить координаты точки в формулу (2.6) и определить значение константы A . С этим значением константы A формула (2.6) будет определять лишь одну интегральную кривую или так называемое **частное решение** уравнения (2.5).

Как правило, задача ставится так: найти решение уравнения (2.5) при условии

$$(2.7) \quad y(0) = y_0.$$

Последняя формула называется **начальным условием** для уравнения (2.5).

Дифференциальное уравнение (2.5) при начальном условии (2.7) имеет единственное решение, которое определяется формулой

$$(2.8) \quad y(x) = y_0 e^{-ax}.$$

Заметим, что для задания начального условия, вообще говоря, не обязательно выбирать значение аргумента x , равное нулю. Как сказано выше, выделить единственное решение из множества, задаваемого формулой (2.6) (то есть определить константу A), можно с помощью любого соотношения $y(x_1) = y_1$, считая его начальным условием.

Если в уравнении (2.5) $a = 0$, то интегрирование приводит к решению $y(x) = C$, то есть к константе, которая при начальном условии (5) равна y_0 . Таким образом решение $y(x)$ сохраняет начальное значение y_0 при изменении x .

Рассмотрим теперь случай неоднородного дифференциального уравнения первого порядка. Пусть дано уравнение

$$(2.9) \quad y' + ay = b$$

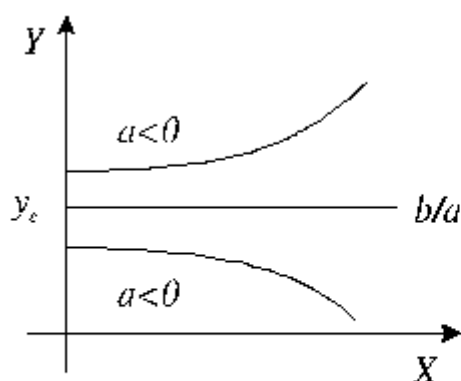
с начальным условием $y(0) = y_0$.

Введем новую неизвестную $z = y - \frac{b}{a}$ (считаем, что $a \neq 0$). Теперь уравнение (2.9) примет вид $z' + a\left(z + \frac{b}{a}\right) = b$ или $z' + az = 0$. Как было показано выше, решением последнего уравнения является функция $z = z_0 e^{-ax}$. Возвращаясь к изначальной неизвестной, получаем решение уравнения (9) при заданном начальном условии:

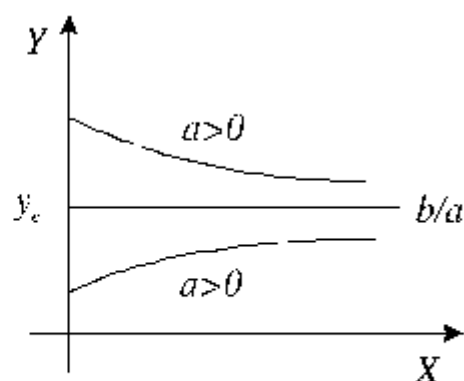
$$(2.10) \quad y(x) = \left(y_0 - \frac{b}{a}\right)e^{-ax} + \frac{b}{a} \quad (a \neq 0)$$

Если в уравнении (2.9) $a = 0$, то его решением при заданном начальном условии будет функция $y(x) = bx + y_0$.

Заметим, что решение (10) состоит из двух частей: $y_h = Ae^{-ax}$ - решения однородного уравнения $y' + ay = 0$ и $y_0(x) = b/a$ - решения, которое назовем равновесным, и которое получается, если в уравнении (2.10) положить $y' = 0$. Такое представление позволяет рассматривать решение (2.10) уравнения (2.9) как сумму равновесного или фиксированного значения y_e и отклонения или девиации y_h траектории $y(x)$ от равновесного значения. Это отклонение возрастает экспоненциально с ростом x при $a < 0$ и стремится к нулю при $a > 0$. В первом случае ($a < 0$) решение называется **неустойчивым**, а во втором – **устойчивым** (асимптотически устойчивым).



Случай неустойчивого решения.



Устойчивое решение. ¶

Рисунок 11 Устойчивость решения

Как показано на рисунке 11, отклонение $y_h = (y_0 - y_e)e^{-ax}$ от уровня равновесия $\frac{b}{a}$ уменьшается с ростом x при $a > 0$ и увеличивается с ростом x при $a < 0$.

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ 11.

В следующих дифференциальных уравнениях:

- Найти общее решение.
- Построить несколько интегральных кривых.
- Найти частное решение, удовлетворяющее условию: $y(-2)=4$.

1) $xy' - y = 0$

3) $xy' + y = 0$

2) $yy' + x = 0$

4) $y' = y$

Найти общие решения и частные решения, если заданы начальные условия:

5) $x^2y' + y = 0$

9) $y' = 6y - 3$

6) $2y'\sqrt{x} = y, \quad y(4)=1$

10) $y' = 6y + 4$

7) $y' = (2y+1)\operatorname{ctg} x, \quad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$

11) $y' + 6y = 12$

12) $y' - 3y = -18$

8) $x^2y' + y^2 = 0, \quad y(-1)=1$

Ответы:

1) $y=Cx, \quad y=-2x$; 2) $x^2 + y^2 = C^2, \quad x^2 + y^2 = 20$; 3) $xy = C, \quad xy = -8$;

4) $y = Ce^x, \quad y = 4e^{x+2}$; 5) $y = Ce^{\frac{1}{x}}$; 6) $y = Ce^{\sqrt{x}}, \quad e^{\sqrt{x}-2}$;

7) $y = 0,5 \cdot C \cdot \sin^2 x - 0,5, \quad y = 2\sin^2 x - 0,5$; 8) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = C; \quad y = -x$.

Equation Section (Next) Тема 9. Системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

Если одно дифференциальное уравнение описывает изменение во времени состояния одного объекта, то система подобных уравнений описывает динамику состояния системы взаимосвязанных объектов. Начнем изучение систем с простейшего случая однородной системы.

Однородные системы

Однородной называется система следующего вида:

$$(3.1) \quad \begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = a_{11}y_1 + \dots + a_{1n}y_n \\ \dots\dots\dots \\ \frac{dy_n}{dt} = a_{n1}y_1 + \dots + a_{nn}y_n \end{cases}$$

Стандартным обозначением для производной по времени является точка сверху переменной. То есть $\dot{y} = \frac{dy}{dt}$. В матричной форме систему (3.1) можно переписать следующим образом:

$$(3.2) \quad \begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \vdots \\ \dot{y}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \frac{d\vec{y}}{dt} = A\vec{y}$$

Будем искать решение (3.2) в виде: $\vec{y} = \vec{b}e^{\lambda t}$, где $\vec{b}$ - вектор постоянных множителей. Подставляя это решение в (3.2), получаем:

$$\vec{b}\lambda e^{\lambda t} = A\vec{b}e^{\lambda t} \Rightarrow A\vec{b} = \lambda\vec{b}$$

То есть мы получаем уже рассматривавшуюся ранее задачу о собственных числах и собственных векторах преобразования A (см. тему 2 –

(2.17)). Наша задача - определить такие λ и $\mathbf{b}$, при которых задача имеет нетривиальное решение ($\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$). Решая характеристическое уравнение:

$$|A - \lambda E| = 0$$

получаем собственные числа λ_i . Далее можно обычным способом находить собственные вектора, но на практике поступают по другому. В исходную систему подставляют выражение $\vec{y} = \vec{b}e^{\lambda t}$, где λ – собственное число.

Пример 1. Решить систему

$$(3.3) \quad \begin{cases} \dot{x} = x + 2y \\ \dot{y} = 2x + y \end{cases}$$

Решим характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (1-\lambda)^2 - 4 = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = -1$$

Пусть теперь

$$(3.4) \quad \begin{aligned} x &= c_1 e^{\lambda_1 t} + b_1 e^{\lambda_2 t} = c_1 e^{3t} + b_1 e^{-t} \\ y &= c_2 e^{\lambda_1 t} + b_2 e^{\lambda_2 t} = c_2 e^{3t} + b_2 e^{-t} \end{aligned}$$

Подставим (3.4) в первое уравнение системы (3.3):

$$3c_1 e^{3t} - b_1 e^{-t} = c_1 e^{3t} + b_1 e^{-t} + 2c_2 e^{3t} + 2b_2 e^{-t}$$

Приравняем по отдельности коэффициенты при e^{3t} и e^{-t} :

$$\begin{cases} 3c_1 = c_1 + 2c_2 \\ -b_1 = b_1 + 2b_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = c_2 \\ b_1 = -b_2 \end{cases}$$

Теперь (3.4) превращается в

$$(3.5) \quad \begin{aligned} x &= c_1 e^{3t} + b_1 e^{-t} \\ y &= c_1 e^{3t} - b_1 e^{-t} \end{aligned}$$

где (c_1, c_1) – собственный вектор для $\lambda=3$, а $(b_1, -b_1)$ – для $\lambda= -1$. (3.5) является общим решением однородной системы (3.3).

Неоднородные системы

Рассмотрим теперь неоднородную систему:

$$(3.6) \quad \begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \vdots \\ \dot{y}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \frac{d\vec{y}}{dt} = A\vec{y} + \vec{d}$$

Из теории дифференциальных уравнений известно, что общее решение неоднородной системы состоит из общего решения однородной системы (3.2) и какого-либо частного решения неоднородной системы (3.6). В случае системы с постоянными коэффициентами в качестве частного решения системы (3.6) удобно взять *стационарное решение*. Стационарным называется решение, которое не изменяется во времени, то есть для этого решения y производная по времени равна нулю ($\dot{y} = 0$). Подставляя в (3.6) нули вместо производных, получаем систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix},$$

решение которой и является стационарным решением системы (3.6).

Пример 2. Решить систему дифференциальных уравнений:

$$(3.7) \quad \begin{cases} \dot{x} = -2x + y + 1 \\ \dot{y} = 2x - 3y + 2 \end{cases}$$

Найдем стационарное решение, полагая $\dot{x} = \dot{y} = 0$:

$$(3.8) \quad \begin{cases} -2x + y + 1 = 0 \\ 2x - 3y + 2 = 0 \end{cases}$$

Складывая уравнения, получаем:

$$(3.9) \quad -2y + 3 = 0 \Rightarrow y_{\text{стац}} = \frac{3}{2} \Rightarrow x_{\text{стац}} = \frac{5}{4}$$

Стационарное решение найдено. Теперь найдем общее решение однородной системы, которая получается из (3.7) удалением свободных членов:

$$\begin{cases} \dot{x} = -2x + y \\ \dot{y} = 2x - 3y \end{cases}$$

Решим характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} -2-\lambda & 1 \\ 2 & -3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 + 5\lambda + 4 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -4, \quad \lambda_2 = -1$$

Будем искать общее решение однородной системы в виде:

$$(3.10) \quad \begin{cases} x = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-4t} \\ y = a e^{-t} + b e^{-4t} \end{cases}$$

Подставляя (3.10) в (3.8) получаем:

$$-c_1 e^{-t} - c_2 4e^{-4t} = -2c_1 e^{-t} - 2c_2 e^{-4t} + a e^{-t} + b e^{-4t}$$

$$\begin{cases} -c_1 = -2c_1 + a \\ -4c_2 = -2c_2 + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = c_1 \\ b = -2c_2 \end{cases}$$

Таким образом, общим решением однородной системы является:

$$(3.11) \quad \begin{cases} x_{\text{одн}} = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-4t} \\ y_{\text{одн}} = c_1 e^{-t} - 2c_2 e^{-4t} \end{cases}$$

где $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} c_2 \\ -2c_2 \end{pmatrix} = c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ - собственные вектора, принадлежащие собственным числам (-1) и (-4), соответственно.

Окончательно, общим решением системы (3.7) является сумма:

$$(3.12) \quad \begin{cases} x = x_{одн} + x_{стац} \\ y = y_{одн} + y_{стац} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-4t} + \frac{5}{4} \\ y = c_1 e^{-t} - 2c_2 e^{-4t} + \frac{3}{2} \end{cases}$$

Устойчивость решения системы линейных дифференциальных уравнений

В приведенном выше примере 2 решение однородной системы (3.11) состоит из членов, содержащих в качестве сомножителей либо e^{-t} , либо e^{-4t} . Оба этих сомножителя с течением времени, то есть при стремлении t к бесконечности, стремятся к нулю. Это означает, что

$$(3.13) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} x_{одн} = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} y_{одн} = 0$$

Таким образом, общее решение системы (3.12) с течением времени сходится к стационарному решению. В подобных случаях говорят, что стационарное решение системы является асимптотически устойчивым. Устойчивость обеспечивается отрицательностью собственных чисел λ (-1 и -4) и математически выражается условием (3.13).

Вернемся к примеру 1. Его решение:

$$(3.14) \quad \begin{aligned} x &= c_1 e^{3t} + b_1 e^{-t} \\ y &= c_1 e^{3t} - b_1 e^{-t} \end{aligned}$$

не обладает свойством (3.13). Если вторые члены в (3.14), соответствующие собственному числу (-1), с увеличением t стремятся к нулю, то первые члены, соответствующие собственному числу 3, с увеличением t бесконечно возрастают по модулю. Разумеется, если оба собственных числа положительны, то соотношение (3.13) также не выполняется.

Рассмотрим проблему устойчивости решения системы двух линейных дифференциальных уравнений первого порядка более подробно. Пусть дана система:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}$$

где A – матрица коэффициентов, а d – столбец свободных членов.

Соответствующая ей однородная система имеет вид:

$$(3.15) \quad \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Пусть $\Delta = \det A \neq 0$. Для нахождения общего решения мы должны найти корни характеристического уравнения:

$$(3.16) \quad |A - \lambda E| = 0 \Rightarrow \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + \Delta = 0$$

Из условия $\Delta \neq 0$ следует, что $\lambda=0$ не является корнем характеристического уравнения (3.16).

Ограничимся рассмотрением случая, когда корни характеристического уравнения действительны и различны. Пусть $a = (a_1, a_2)$ – собственный вектор, принадлежащий собственному числу λ_1 , а $b = (b_1, b_2)$ – собственный вектор, принадлежащий собственному числу λ_2 . Тогда, как мы знаем, общее решение системы (3.15) имеет вид:

$$(3.17) \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} e^{\lambda_1 t} + c_2 \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} e^{\lambda_2 t}$$

Можно рассматривать (3.17) как описание параметрической кривой (параметр – время t), отражающей движение точки (x, y) в координатной плоскости. Начальное положение точки в момент времени $t=0$ определяется значениями произвольных констант c_1 и c_2 .

Решение оказывается устойчивым, если при любых начальных условиях траектории движения точки (x, y) сходятся к нулю (точке покоя). На рисунке

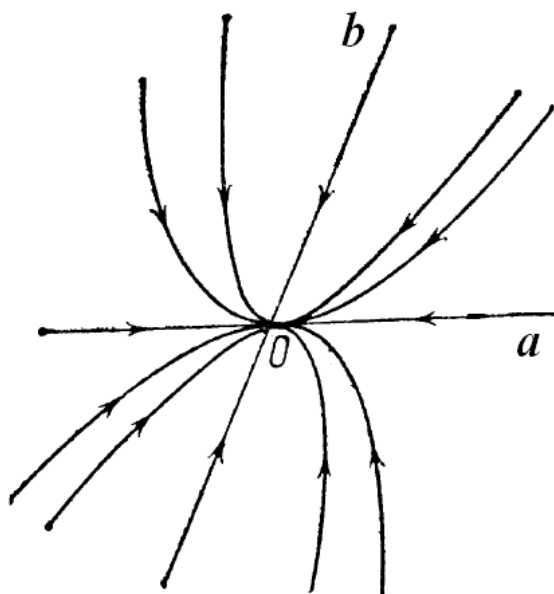
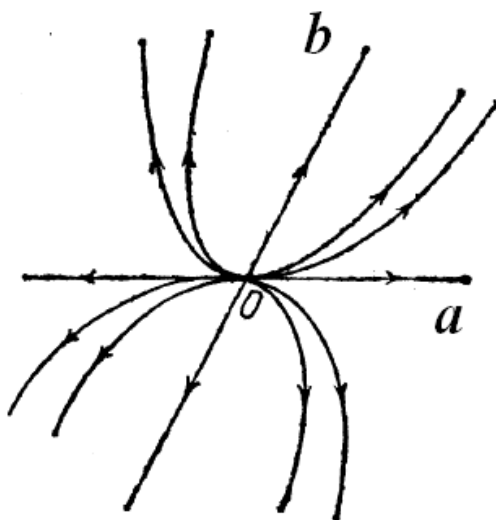


Рисунок 12 Устойчивый узел

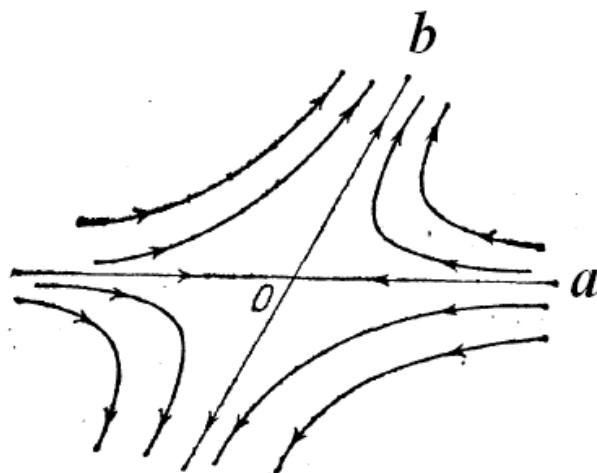
12 изображена характерная картина траекторий движения в случае, когда оба собственных числа отрицательны. Стрелками обозначены направления движения точек. Прямые линии, обозначенные буквами a и b , соответствуют линиям собственных векторов. Такая точка покоя получила название устойчивого узла.

Если оба собственных числа λ положительны, то точку покоя называют неустойчивым узлом (рис.

13). Данный случай получается из предыдущего заменой t на $(-t)$. Поэтому траектории будут иметь прежний вид, но движение точки по траектории будет происходить в противоположном направлении.



Неустойчивый узел



Седло

Рисунок 13

Наконец, если число $\lambda_1 < 0$, а $\lambda_2 > 0$, то точка покоя тоже неустойчива, так как $e^{\lambda_2 t} \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow \infty$. Точки, находящиеся в окрестности начала координат по траектории (3.17) уходят в бесконечность. Отметим, что в данном случае имеется траектория, по которой движение точки происходит в направлении

начала координат. Это прямая a , соответствующая собственному вектору, принадлежащему отрицательному собственному числу λ_1 . Точка покоя данного вида называется седлом.

Модель гонки вооружений Ричардсона

Модель Ричардсона была первым опытом применения динамического моделирования в области международных отношений. Он применил ее для описания гонки вооружений между Австро-Венгрией и Германией с одной стороны, и Россией и Францией – с другой, в период, предшествовавший I мировой войне (1909-1913 гг.).

Основными переменными в модели могут быть собственно количества вооружений или военные бюджеты (военные расходы) соперничающих сторон.

В основу модели были положены следующие соображения:

- а) Скорость роста военных расходов пропорциональна уровню военных расходов противника;
- б) Экономические ограничения приводят к уменьшению скорости роста военных расходов пропорционально их размерам;
- с) Государство стремится увеличить свой военный бюджет, даже в условиях отсутствия внешней угрозы.

Обозначим военные расходы соперничающих государств через x и y , а скорости их роста: $\dot{x}$, $\dot{y}$. Модель Ричардсона задается системой:

$$(3.18) \quad \begin{cases} \dot{x} = a_1 y - b_1 x + c_1 \\ \dot{y} = a_2 x - b_2 y + c_2 \end{cases}$$

Коэффициенты a обычно называются коэффициентами обороны, b – усталости, а c – коэффициентами доброй воли (если $c < 0$) или претензий ($c > 0$). Коэффициенты a и b всегда положительны.

Составим для системы (3.18) характеристическое уравнение:

$$(3.19) \quad \begin{vmatrix} -b_1 - \lambda & a_1 \\ a_2 & -b_2 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 + (b_1 + b_2)\lambda + b_1b_2 - a_1a_2 = 0$$

Решение системы (3.18) будет асимптотически устойчивым, если оба корня характеристического уравнения (3.19) будут отрицательными. Выясним, при каких обстоятельствах это происходит. Если уравнение (3.19) имеет два отрицательных корня, то свободный член этого уравнения должен быть положительным, так как по теореме Виета он является произведением корней. Второй коэффициент уравнения тоже должен быть положительным, так как он представляет собой сумму корней уравнения, взятую с обратным знаком. Наконец, дискриминант уравнения должен быть положителен, что обеспечивает существование корней. В итоге получаем:

$$\begin{cases} b_1b_2 - a_1a_2 > 0 \\ (b_1 + b_2) > 0 \\ (b_1 + b_2)^2 - 4(b_1b_2 - a_1a_2) > 0 \end{cases}$$

Второе неравенство системы выполняется автоматически, так как коэффициенты b положительны. Третье неравенство тоже выполняется автоматически, что становится ясным после следующих преобразований:

$$\begin{aligned} (b_1 + b_2)^2 - 4(b_1b_2 - a_1a_2) > 0 &\Rightarrow b_1^2 + 2b_1b_2 + b_2^2 - 4b_1b_2 + 4a_1a_2 > 0 \\ b_1^2 - 2b_1b_2 + b_2^2 + 4a_1a_2 > 0 &\Rightarrow (b_1 - b_2)^2 + 4a_1a_2 > 0 \end{aligned}$$

Таким образом, отрицательность корней уравнения (3.19) определяется первым из неравенств системы. А именно, решение системы (3.19) будет асимптотически устойчивым, если

$$(3.20) \quad b_1b_2 > a_1a_2$$

Асимптотическая устойчивость означает, что с течением времени военные расходы сторон постепенно стабилизируются на некоторых уровнях, соответствующих стационарному решению системы (3.19). Если условие устойчивости (3.20) не выполняется, то происходит бесконечная

эскалация гонки вооружений, которая на практике обычно разрешается войной.

Модель ведения боевых действий Ланчестера

Пусть силы сторон X и Y вовлечены в сражение. И пусть $x(t)$ и $y(t)$ описывают размер этих сил в момент времени t . (Это может быть число танков, если речь идет о танковых сражениях; число самолетов в авиационных сражениях; число солдат и т.д и т.п.). Время может изменяться в часах, днях, месяцах и т.п. В силу того, что непрерывные модели обычно исследуются легче, чем дискретные, последние часто заменяются на непрерывные. Так поступим и мы. Будем считать, что время непрерывно, а $x(t)$ и $y(t)$ есть непрерывные и, более того, дифференцируемые функции времени.

Как выглядят функции $x(t)$ и $y(t)$ мы пока не знаем, но нам могут быть известны такие параметры как *темпы (или скорости) операционных потерь (ТОП)*, связанные болезнями, дезертирством и пр.; *темпы боевых потерь (ТБП)*, *темпы поставок (или восстановления) (ТП)*. Основная идея модели Ланчестера состоит в том, что скорости изменения объемов вооруженных сил должны подчиняться следующему соотношению:

$$(3.21) \quad \dot{x}(\text{или } \dot{y}) = -(\text{ТОП} + \text{ТБП}) + \text{ТП}$$

Конкретизация модели (3.21) может происходить в рамках различных предположений. Рассмотрим один из возможных вариантов.

Сражение с применением обычных вооружений²

В данной модели предполагается, что операционные потери каждой из сторон пропорциональны размеру ее собственных вооруженных сил, а боевые потери пропорциональны размеру вооруженных сил противника. Это приводит к следующей формальной модели:

² В западной литературе данная модель получила название CONCOM (от Conventional Combat)

$$(3.22) \quad \begin{cases} \dot{x} = -ax - by + P(t) \\ \dot{y} = -cx - dy + Q(t) \end{cases} \quad a, b, c, d > 0$$

где $P(t)$ и $Q(t)$ – функции поставок.

Пусть две войсковые группы сражаются в изоляции. Будем считать, что у них нет операционных потерь и нет поставок и подкреплений. Тогда модель (3.22) упрощается:

$$(3.23) \quad \begin{cases} \dot{x} = -by \\ \dot{y} = -cx \end{cases}$$

где by и cx – темпы боевых потерь, зависящие от количества вооруженных сил противника, а b и c – соответствующие коэффициенты боевых потерь.

Разделив в (3.23) одно уравнение на другое, получим уравнение с разделяющимися переменными:

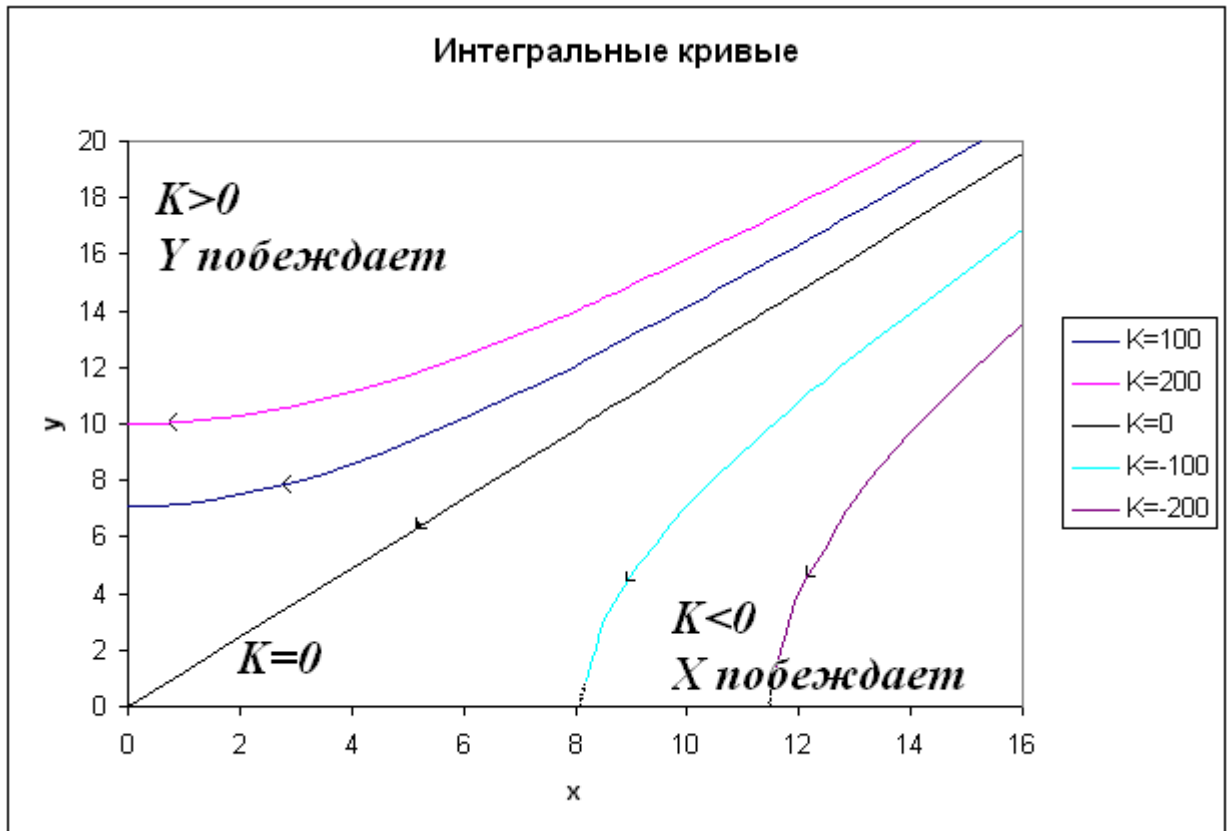
$$\frac{dy}{dx} = \frac{cx}{by} \Rightarrow by dy = cx dx$$

Проинтегрировав его, получаем:

$$(3.24) \quad \frac{by^2}{2} = \frac{cx^2}{2} + C \Rightarrow by^2 - cx^2 = K$$

где $K=2C$ – константа интегрирования.

(3.24) является уравнением гиперболы. Построим картину соответствующих интегральных кривых. Поскольку отрицательные $x(t)$ и $y(t)$ не имеют физического смысла, будем использовать только первую четверть координатной плоскости.



При $K=0$ уравнение (3.24) приводится к виду $y = \sqrt{\frac{c}{b}}x$. Это уравнение прямой линии, то есть в случае ведения боевых действий боевые силы сторон пропорционально сокращаются и одновременно иссякают (финальное состояние $(0,0)$). При $K>0$ первыми иссякают силы X , и Y побеждает. Финальное состояние можно легко установить из уравнения (3.24). Положим в нем $x=0$, и получим что $by^2 = K \Rightarrow y_{фин} = \sqrt{\frac{K}{b}}$. Аналогичным образом при отрицательных K первыми иссякают силы Y , сторона X побеждает, а финальное соотношение сил оказывается таким: $\left(\sqrt{\frac{-K}{c}}; 0\right)$. Узнать знак константы K легко по начальным условиям. Пусть $x_0 = x(0)$, $y_0 = y(0)$, тогда

$$K = by_0^2 - cx_0^2$$

Условие выигрыша сражения для X (условие $K<0$) - $\frac{y_0}{x_0} < \sqrt{\frac{c}{b}}$.

Условие выигрыша сражения для Y (условие $K > 0$) - $\frac{y_0}{x_0} > \sqrt{\frac{c}{b}}$.

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ 12.

Решить системы:

$$1) \begin{cases} \dot{x} + y = 0 \\ \dot{x} - \dot{y} = 3x + y \end{cases} \quad 2) \begin{cases} \dot{x} + x - y = e^t \\ \dot{y} - x + y = e^t \end{cases}$$

Определить, будет ли иметь место бесконечная эскалация гонки вооружений или ее стабилизация на определенном уровне. В последнем случае найти урони стабилизации.

$$3) \begin{cases} \dot{x} = 3y - x + 2 \\ \dot{y} = 2x - 3y + 3 \end{cases} \quad 4) \begin{cases} \dot{x} = 2y - 2x + 3 \\ \dot{y} = x - 2y + 1 \end{cases}$$

Найти общее решение и нарисовать несколько фазовых траекторий:

$$5) \begin{cases} \dot{x} = y - 2x + 1 \\ \dot{y} = x - 2y + 2 \end{cases} \quad 6) \begin{cases} \dot{x} = 3y - 2x + 1 \\ \dot{y} = 3x - 2y + 2 \end{cases}$$

Получить общее решение, нарисовать эскиз интегральных кривых и установить условия выигрыша сражения для следующих моделей:

7) «Патизанская война». Предполагается, что силы противоборствующих сторон разбиты на мелкие боевые группы (партизанские отряды), ведущие скрытное маневрирование и вступающие в бой лишь при встрече с противником. Боевые потери в этом случае считаются зависящими от частоты встреч, которая, в свою очередь, прямо пропорциональна количеству отрядов как с одной, так и с другой стороны. Как и ранее полагаем, что операционные потери и пополнения отсутствуют. Эти предположения приводят к модели:

$$\begin{cases} \dot{x} = -gxy \\ \dot{y} = -hxy \end{cases}$$

где g и h – положительные константы.

8) «Патизанские силы против регулярных частей» («Вьетнамская война»). Пусть сторона X представлена партизанскими силами, а сторона Y – регулярными войсками. Делая те же упрощающие предположения, что и ранее, получаем модель:

$$\begin{cases} \dot{x} = -gxy \\ \dot{y} = -cx \end{cases}$$

где c и g – константы.