ЧАСТЬ 2. ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ В ПОЛИТИЧЕСКОЙ НАУКЕ.

Тема 4. Производная и дифференциал.

Непрерывность функции. Точки разрыва.

В реальной жизни, в том числе и в политической, большинство ситуаций обладает следующим свойством: если параметры, характеризующие ситуацию, немного изменятся, то немного изменится и сама ситуация. Здесь важно не то, что ситуация изменится, а то, что она изменится немного. В математике подобное свойство называется непрерывностью. Если же ситуация такова, что небольшое изменение ее параметров кардинально меняет всю ситуацию, то ситуация называется кризисной. В математике кризису соответствует понятие разрыва функции.

Определение непрерывности функции. Функция *y=f(x)* называется *непрерывной* в точке *a,* если она определена в некоторой окрестности этой точки и $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Функция *y=f(x)* называется *непрерывной слева (справа)* в точке *a*, если $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = f(a)$ $\left(\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = f(a)\right)$. Заметим, что при этом функция должна быть определена в некоторой окрестности слева (справа) от точки *a.* Заметим также, что непрерывность функции в точке равносильна непрерывности ее в этой точке и слева и справа.

Функция называется *непрерывной на интервале*, если она непрерывна в каждой точке этого интервала; непрерывной на отрезке [a, b], если она непрерывна на интервале (a, b), непрерывна справа в точке b и непрерывна слева в точке a (a < b).

Пример 1. Следующие функции непрерывны на всей числовой оси: постоянная *y = C;* линейная *y = kx + b; cos x,* sin *x;* степенная $x^n\ (n\in N)$*;* показательная $a^x\ (a>0)$.

Точки, в которых функция не является непрерывной, называются *точками разрыва.* Если функция в точке *a* имеет конечный предел (двусторонний предел), но этот предел отличен от значения функции в этой точке (или точка не входит в область определения функции), то точка *a* называется *устранимой* точкой разрыва. Если функция в точке *b* имеет конечные односторонние пределы, но они не совпадают (тогда двусторонний предел не существует), то *b* называется *точкой разрыва 1-го рода.* Если функция в точке *c* не имеет хотя бы одного конечного одностороннего предела, то точка *c* называется *точкой разрыва 2-го рода.*

Пример 2. Точка 0 является устранимой точкой разрыва функции *y* = (sin *x)/x,* так как функция имеет двусторонний предел $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$, но она не определена в точке 0.

Пример 3. Для функции «знак (сигнум)»

$$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}-1, & \textit{при} \quad x<0\\ 0, & \textit{при} \quad x=0\\ 1, & \textit{при} \quad x>0\end{cases}$$

точка 0 является точкой разрыва 1-го рода, так как $\lim\limits_{x\to -0}\operatorname{sgn}x=-1,\quad \lim\limits_{x\to +0}\operatorname{sgn}x=1,$, т.е. оба односторонних предела существуют, но они не равны.

Пример 4. Точка 0 является точкой разрыва 2-го рода функции 1/x, так как $\lim\limits_{x\to +0}\dfrac{1}{x}=\infty,\quad \lim\limits_{x\to -0}\dfrac{1}{x}=-\infty$.

Пример 5. Так называемая функция Дирихле

$$d(x)=\begin{cases}1, & \textit{если } x \textit{ рационально}\\ 0, & \textit{если } x \textit{ иррационально}\end{cases}$$

имеет разрыв 2-го рода в каждой точке.

Свойства непрерывных функций. Отметим следующие свойства:

1) если функции *f(x)* и *g(x)* непрерывны в точке *a,* то функции *f(x) ± g(x), f(x) g(x)* и *f(x)/g(x)* (при условии, что $g(a) \neq 0$ также непрерывны в этой точке;

2) если функция *u* = *g(x)* непрерывна в точке *a* и функция $y = f(u)$ непрерывна в точке *g(a),* то сложная функция *y=f(g(x))* также непрерывна в точке *a;*

3) элементарные функции непрерывны в области их определения;

4) теорема Вейерштрасса: если функция непрерывна на отрезке, то она на этом отрезке достигает своих наименьшего и наибольшего значений;

5) теорема Больцано-Коши: пусть функция определена и непрерывна на отрезке *[a, b]* и на концах этого промежутка принимает значения разных знаков; тогда найдется точка $c \in [a, b]$, в которой функция равна нулю;

6) асимптоты: прямая *l* называется *асимптотой* графика функции *y=f(x)*, если $\lim\limits_{OM \to \infty} MN = 0$, где *MN* — расстояние точки *M* на графике функции от этой прямой; *OM* — расстояние этой точки от начала координат (рис. 1).

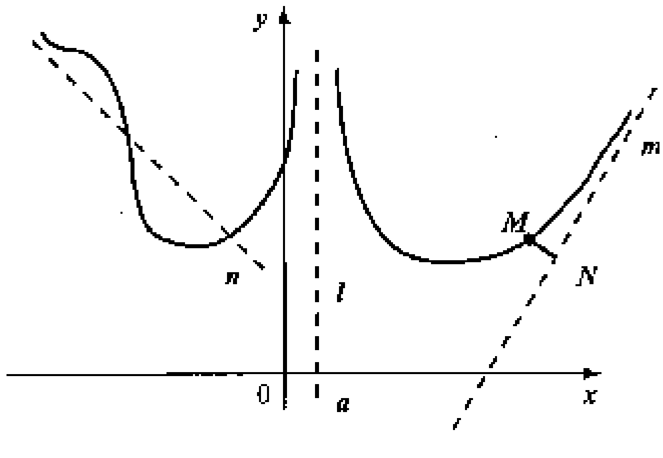

Рисунок 1

Асимптоты бывают вертикальными и наклонными. Если $\lim\limits_{x \to a} |f(x)| = \infty$, то график функции имеет вертикальную асимптоту (прямая *l* на рис. 1, уравнение которой $x = a$).

Для наклонной асимптоты условие $OM \to \infty$ можно заменить условием $x \to \infty$ или $x \to -\infty$. В первом случае наклонная асимптота называется правосторонней (прямая m на рис. 1), а во втором случае — левосторонней (прямая n).

Частным случаем наклонных асимптот являются горизонтальные асимптоты.

В заключение отметим, что непрерывность элементарных функций в области определения используется для нахождения пределов.

Ведь если функция *f(x)* непрерывна в точке *a*, то $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Пример.

Налоговая ставка *N* в большинстве стран имеет примерно такой график, как на рис. 2, *a.*

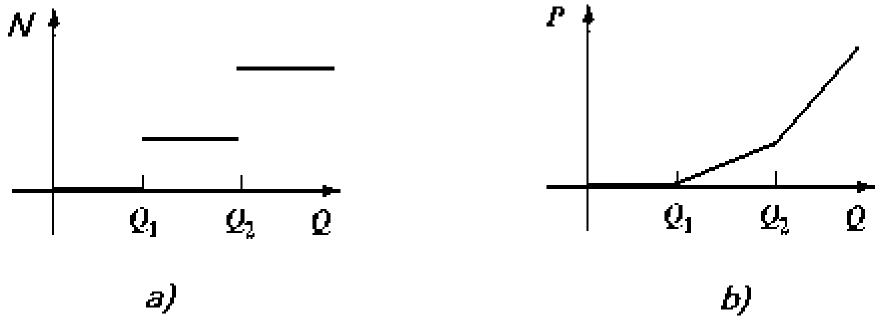

Рисунок 2

На концах промежутков она разрывна, и разрывы эти 1-го рода. Однако сама величина подоходного налога P (рис. 2, *b)* является непрерывной функцией годового дохода *Q.* Отсюда, в частности, вытекает, что если годовые доходы двух людей отличаются незначительно, то и различия в величинах подоходного налога, которые они должны уплатить, также не должны быть большие. Интересно, что это обстоятельство воспринимается огромным большинством людей как совершенно естественное, над которым они даже не задумываются. Если бы функция P имела разрыв, то величина подоходного налога скачкообразно изменялась бы при некоторой величине годового дохода. Скажем, годовые доходы, отличающиеся всего на 1 рубль, могли бы приводить к кардинально разным суммам налога, что, безусловно, воспринималось бы как социальная несправедливость.

Производная

Рассмотрим функцию $y=f(x)$, непрерывную в некоторой окрестности точки x. Пусть Δx— приращение аргумента в точке x. Обозначим через Δy или Δf приращение функции, равное $f(x+\Delta x) - f(x)$.

Отношение $\Delta f / \Delta x$, как видно из рисунка 3, равно тангенсу угла α, который составляет секущая MN кривой $y = f(x)$ с положительным направлением горизонтальной оси координат.

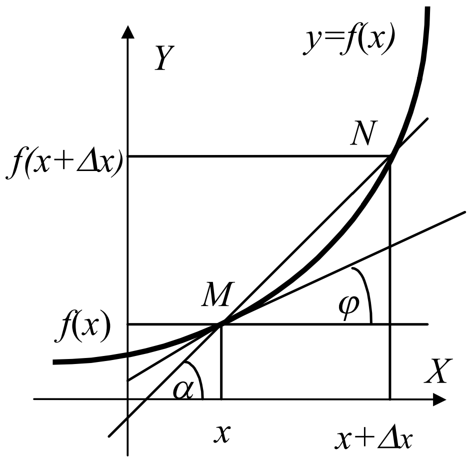

Рисунок 3

Представим себе процесс, в котором величина Δx, неограниченно уменьшаясь, стремится к нулю. При этом точка N будет двигаться вдоль кривой $y = f(x)$, приближаясь к точке M, а секущая MN будет вращаться около точки M так, что при очень малых величинах Δx её угол наклона α будет сколь угодно близок к углу φ наклона касательной к кривой в точке x. Следует отметить, что все сказанное относится к случаю, когда график функции $y = f(x)$ не имеет излома или разрыва в точке x, то есть в этой точке можно провести касательную к графику функции.

Отношение $\Delta y / \Delta x$ или, что то же самое $(f(x + \Delta x) - f(x)) / \Delta x$, можно рассматривать при заданном x как функцию аргумента Δx. Эта функция не определена в точке $\Delta x = 0$. Однако её предел в этой точке может существовать.

Если существует предел отношения $\Delta y / \Delta x$ в точке $\Delta x = 0$, то он называется **производной** функции $y = f(x)$ в точке x и обозначается $\frac{dy}{dx}$, y' или $f'(x)$.

$$\frac{df}{dx} = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Нахождение производной функции $y = f(x)$ называется **дифференцированием**.

Если для любого числа x из открытого промежутка $(a;b)$ можно вычислить $f'(x)$, то функция $f(x)$ называется **дифференцируемой на промежутке** $(\boldsymbol{a};\boldsymbol{b})$.

Геометрический смысл производной заключается в том, что производная функции $f(x)$ в точке x равна тангенсу угла наклона касательной к графику функции в этой точке.

Производная — это скорость изменения функции в точке $\boldsymbol{x}$. Из определения производной следует, что $f'(x) \approx \Delta f / \Delta x$, причем точность этого приближенного равенства тем выше, чем меньше Δx. Производная $f'(x)$ является приближенным коэффициентом пропорциональности между Δf и Δx.

Производная функции $f(x)$ не существует в тех точках, в которых функция не является непрерывной. В то же время функция может быть непрерывной в точке x_0, но не иметь в этой точке производной. Такую точку назовём угловой точкой графика функции или точкой излома. Графические примеры приведены на рисунке 4.

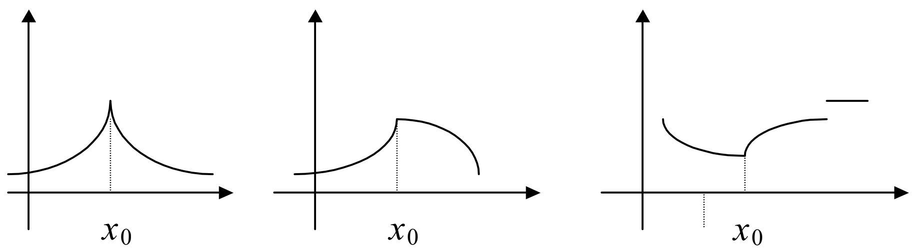

Рисунок 4

Так функция $y = |x|$ не имеет производной в точке $x = 0$.

Ниже приводится таблица производных элементарных функций.

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
C	0	e^x	e^x	cos*x*	-sin*x*
x	1	ln*x*	1/*x*	tg*x*	$1/\cos^2 x$
x^n	nx^{n-1}	a^x	$a^x \ln a$	arcsin*a*	$1/\sqrt{1-x^2}$
$\sqrt{x}$	$1/(2\sqrt{x})$	$\log_a x$	$1/(x\ln a)$	arccos*a*	$-1/\sqrt{1-x^2}$
1/*x*	$-1 / x^2$	sin*x*	cos*x*	arctg*x*	$1/(1+x^2)$

Приведем теперь основные свойства производной.

1. Если функция имеет производную в точке, то она непрерывна в этой точке.
2. Если существует f′(x) , и C - произвольное число, то функция *Cf(x)* имеет производную: (Cf(x))′ = Cf′(x).
3. Если существуют f′(x) и g′(x), то функция S(x) = f(x) + g(x) имеет производную: S′(x) = f′(x) + g′(x).
4. Если существуют f′(x) и g′(x), то функция P(x) = f(x)g(x) имеет производную: P′(x) = f′(x)g(x) + f(x)g′(x).
5. Если существуют f′(x) и g′(x) и при этом g(x) ≠ 0, то функция D(x) = f(x) / g(x) имеет производную: D′(x) = (f′(x) g(x) - f(x) g′(x)) / g2(x).
6. Пусть функция g(x) имеет производную в точке x, а функция f(x) имеет производную в точке z = g(x). Тогда сложная функция F(x) = f(g(x)) имеет в точке x производную F′(x) = f′(z) g′(x) или в других обозначениях: $F'(x) = \dfrac{df}{dg}\dfrac{dg}{dx}$.

Приведем примеры вычисления производной сложной функции.

Пусть требуется найти производную функции $F(x) = \sin^2 x$. Здесь *g(x)=sin(x)*, а $f(g(x)) = (\sin x)^2 = g^2$. Тогда

$\frac{df}{dg} = \left(g^2\right)' = 2g = 2\sin x, \quad \frac{dg}{dx} = \left(\sin x\right)' = \cos x.$ Окончательно имеем: $F'(x) = 2\sin x\cos x = \sin 2x$

Аналогичным образом можно вычислить следующие производные:

$$F(x) = \sin x^2, \quad F'(x) = 2x\cos x^2$$

$$F(x) = \ln\cos x, \quad F'(x) = \frac{1}{\cos x}(-\sin x) = -tg\,x;$$

$$F(x) = \cos\ln x, \quad F'(x) = (-\sin\ln x)\frac{1}{x};$$

Дифференциал функции.

Рассмотрим две функции: $y_1 = f1(x)$ и $y2 = f2(x)$, которые имеют производные $f1'(x)$ и $f2'(x)$ в каждой точке некоторой области D.

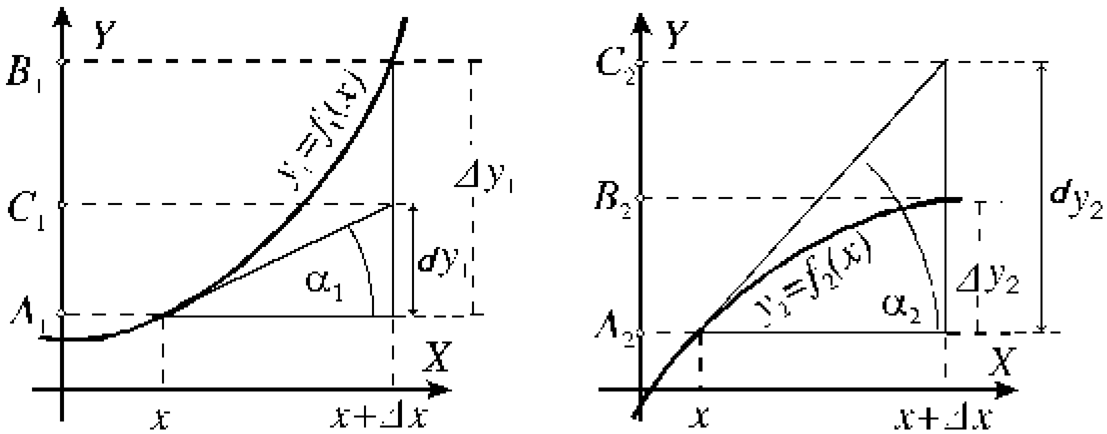

Рисунок 5

Возьмем какую-либо точку x из области D и дадим аргументу приращение Δx. Тогда функции получат, соответственно, приращения $\Delta y_1 = f_1(x + \Delta x) - f_1(x)$ и $\Delta y_2 = f_2(x + \Delta x) - f_2(x)$. Из графиков, изображенных на рисунке 5, видно, что в обоих случаях приращения Δy_1 и Δy_2 можно представить в виде сумм двух слагаемых:

(0.1) $\Delta y_1 = (C_1 - A_1) + (B_1 - C_1)$; $\Delta y_2 = (C_2 - A_2) + (B_2 - C_2)$

Первые слагаемые в правых частях обоих выражений (0.1) легко вычисляются из сходных формул: $C_1 - A_1 = \mathrm{tg}\alpha_1\, \Delta x = f_1'(x)\Delta x$; $C_2 - A_2 = \mathrm{tg}\alpha_2\, \Delta x = f_2'(x)\Delta x$.

Величина $f'(x)\,\Delta x$ называется главной частью приращения функции $y = f(x)$ в точке x. (Здесь мы говорим только о функции, имеющей в точке x производную). Главная часть приращения функции линейна относительно приращения аргумента Δx. Если приращение аргумента Δx уменьшить в k раз, то и главная часть приращения функции уменьшится в k раз.

Формулы (3.1) можно переписать в виде:

(0.2) $$\Delta y_1 = f_1{}'\,\Delta x + r_1; \quad \Delta y_2 = f_2{}'\,\Delta x + r_2.$$

Здесь $r_1 = B_1 - C_1$; $r_2 = B_2 - C_2$.

Величины r_1 и r_2 в формулах (3.2) при уменьшении Δx в k раз уменьшаются более чем в k раз, и говорят, что r_1 и r_2 стремятся к нулю быстрее, чем Δx .

Назовем функцию $\beta\,(z)$ бесконечно малой в точке $z = z0$, если $\lim\limits_{z \to z_0} \beta(z) = 0$.

Пусть функции $\beta\,(z)$ и $\gamma(z)$ являются бесконечно малыми в точке $z = z0$. Функция $\beta\,(z)$ называется бесконечно малой более высокого порядка, чем функция $\gamma\,(z)$, если $\lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{\beta(z)}{\gamma(z)} = 0$.

Величины r_1 и r_2 в формулах (3.2) являются функциями аргумента Δx, бесконечно малыми в точке $\Delta x = 0$. Можно показать, что $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{r_i(\Delta x)}{\Delta x} = 0; \quad i = 1,2$. Это означает, что функции $r1(\Delta x)$ и $r2(\Delta x)$ являются бесконечно малыми функциями более высокого порядка, чем Δx, в точке $\Delta x = 0$.

Таким образом, приращение функции $y = f(x)$ в точке, в которой существует её производная, может быть представлено в виде:

$$\Delta y = f'(x)\,\Delta x + \beta\,(\Delta x),$$

где $\beta\,(\Delta x)$ - бесконечно малая функция более высокого порядка, чем Δx, в точке $\Delta x = 0$.

Главная, линейная относительно Δx, часть приращения функции $y = f(x)$, равная $f'(x)\,\Delta x$, называется дифференциалом и обозначается dy.

$$dy = f'(x)\,\Delta x. \qquad (3.3)$$

Если сюда подставить функцию $f(x) = x$, то, так как $x' = 1$, формула (3.3)примет вид: $dx = \Delta x$. Эта формула легко истолковывается с помощью графика функции $y = x$, из которого видно, что приращение этой функции содержит лишь главную часть. Таким образом для функции $y = x$ приращение совпадает с дифференциалом. Теперь формулу дифференциала (3.3) можно переписать так:

$$dy = f'(x)\,dx.$$

Отсюда следует, что

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}$$

то есть производная функции f(x) равна отношению дифференциала функции к дифференциалу аргумента x.

Очевидны свойства дифференциала :

1. $dC = 0$ (здесь и в следующей формуле C - константа);

2. $d(Cf(x)) = Cdf(x)$;

3. Если существуют df(x) и dg(x), то $d(f(x) + g(x)) = df(x) + dg(x)$, $d(f(x)g(x)) = g(x)df(x) + f(x)dg(x)$. Если при этом $g(x) \neq 0$, то $d\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{g(x)df(x) - f(x)dg(x)}{g^2(x)}$

Пусть $y = f(x)$ - функция, имеющая производную в точке x, тогда $dy = df(x) = f'(x)dx$. Если аргумент x является функцией x(t) некоторой независимой переменной t , то $y = F(t) = f(x(t))$ — сложная функция от t , и её дифференциал вычисляется по формуле $dy = F'(t)dt = f'(x)x'(t)dt$. Однако по определению дифференциала $x'(t)dt = dx$, и последняя формула преобразуется к виду: $dy = f'(x)dx$.

Таким образом, если аргумент функции $y=f(x)$ рассматривать как функцию другого аргумента, так что равенство $\Delta x = dx$ не выполняется, формула дифференциала функции $f(x)$ остается неизменной. Это свойство принято называть свойством инвариантности дифференциала.

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ 7.

Найти производные функций:

1. а) $y = 3\sqrt[3]{x^2} + 2x^3\sqrt{x} + \frac{1}{x^3}$. б) $y = (x^3 - 1)^5 + \frac{x^2}{2}$.

2. а) $y = (x^4 - x^2 + 1)^3$; б) $y = \frac{x^3 - 3x^2 + 1}{x - 1}$.

3. а) $y = \frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x}$; б) $y = \lg\frac{10 - x}{x + 2}$.

4. а) $y = \sqrt[3]{4x^3 - 7x^2 + 1}$; б) $y = (\sin^2 x + 1)e^x$.

5. а) $y = \sqrt[3]{x^2 - 1}\,(x^4 - 1)$; б) $y = \ln\sqrt{x^2 - 1}$.

6. а) $y = e^{x^3 - 5x^2}$; б) $y = \sqrt[3]{x(1 - x)^2}$.

7. а) $y = (x + 1)\sqrt[3]{x^2}$; б) $y = \operatorname{tg} 2x - \operatorname{ctg} 2x$.

8. а) $y = x^2 \cos\frac{1}{x}$; б) $y = x + \sin x \cos x$.

9. а) $y = \cos^2 3x$; б) $y = \sin^2 \frac{x}{2}$.

10. а) $y = \operatorname{tg} \sin x$; б) $y = \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x$.

Вычислить значения производных в указанных точках:

11. $f(x)=\sqrt{x^2+3}+\frac{2x}{x+1};\ f'(1)=?$

12. $f(x)=\frac{x^2-2}{x^2+2};\ f'(2)=?$

13. $f(x)=\frac{x}{3}-\frac{3}{x};\ f'(3)=?$

14. $f(x)=x-\frac{2}{x^2}-\frac{1}{3x^3};\ f'(-1)=?$

15. $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+3}}+\frac{1}{x+1};\ f'(1)=?$

16. $f(x)=\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}+1};\ f'(0)=?$

17. $f(x)=\sin 4x\cos 4x;\ f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=?$

18. $f(x)=\sin^2 x^2;\ f'(0)=?$

19. $f(x)=\frac{\cos x}{1+\sin x};\ f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=?$

20. $f(x)=\sin^4 x-\cos^4 x;\ f'\left(\frac{\pi}{12}\right)=?$

Ответы:

1. а) $y' = \frac{2}{\sqrt[3]{x}} + 7x^2\sqrt{x} - \frac{3}{x^4}$; б) $y' = 15x^2(x^3 - 1)^4 + x$.

2. а) $y' = 6x(x^4 - x^2 + 1)^2(2x^2 - 1)$; б) $y' = \frac{2x^3 - 6x^2 + 6x - 1}{(x-1)^2}$.

3. а) $y' = \frac{4\sin 2x}{(1+\cos 2x)^2}$; б) $y' = \frac{12}{(x-10)(x+2)\ln 10}$.

4. а) $y' = \frac{2x(6x-7)}{3\sqrt[3]{(4x^3 - 7x^2 + 1)^2}}$; б) $y' = e^x(\sin 2x + \sin^2 x + 1)$.

5. а) $y' = \frac{2x(x^2-1)(7x^2+1)}{3\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}$; б) $y' = \frac{x}{x^2 - 1}$.

6. а) $y' = e^{x^3 - 5x^2}(3x^2 - 10x)$; б) $y' = \frac{1-3x}{3\sqrt[3]{x^2}(1-x)}$.

7. а) $y' = \frac{5x+2}{3\sqrt[3]{x}}$; б) $y' = -\frac{8}{\sin^2 4x}$.

8. а) $y' = 2x\cos\frac{1}{x} + \sin\frac{1}{x}$; б) $y' = 1 + \cos 2x$.

9. а) $y' = -3\sin 6x$; б) $y' = \frac{1}{2}\sin x$

10. а) $y' = \frac{\cos x}{\cos^2 \sin x}$; б) $y' = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{\cos^2 x}$.

11. 1; **12**. 4/9; **13**. 2/3; **14**. –2; **15**. 0,125; **16**. 0,125; **17**. –2; **18**. 0; **19**. –0,5; **20**. 1.

Equation Section (Next)Тема 5. Теоремы о дифференцируемых функциях

Производные высших порядков.

Может оказаться, что функция $f'(x)$, называемая первой производной, тоже имеет производную $(f'(x))'$. Эта производная называется **второй**

производной функции $f(x)$ и обозначается $f''(x)$. Если f есть координата движущейся точки и является функцией времени, то мгновенная скорость точки в момент времени t равна $f'(t)$, а ускорение равно $f''(t)$.

Вторая производная также может быть функцией, определенной на некотором множестве. Если эта функция имеет производную, то эта производная называется **третьей производной** функции $f(x)$ и обозначается $f'''(x)$.

Если определена n-я производная $f^{(n)}(x)$ и существует её производная, то она называется n+1-й производной функции $f(x)$: $f^{(n+1)}(x) = (f^{(n)}(x))'$.

Все производные, начиная со второй, называются **производными высших порядков.**

Формула Лагранжа.

Если функция непрерывна на замкнутом промежутке $[a;b]$ и дифференцируема на открытом промежутке $(a;b)$, то можно найти такую точку c, принадлежащую промежутку $(a;b)$, для которой справедливо равенство:

(1.1) $$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

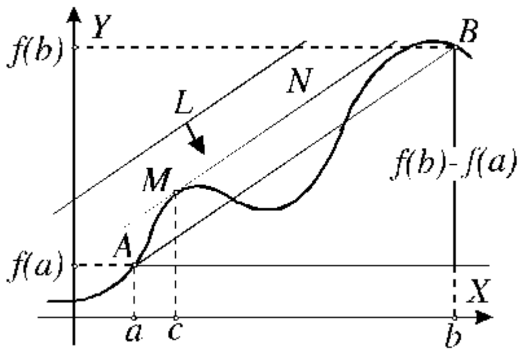

Рисунок 6 Формула конечных приращений Лагранжа

Эта формула называется формулой конечных приращений Лагранжа. Проведем наглядное обоснование этой формулы. Возьмем на графике функции $f(x)$ точки $A(a;f(a))$ и $B(b;f(b))$. Проведем через эти точки прямую AB. Проведем также прямую L, параллельную прямой AB, так, чтобы она не пересекала график функции $f(x)$ на промежутке $(a;b)$. Будем "надвигать" прямую L на график $f(x)$, сохраняя параллельность L и AB, до тех пор, пока прямая L не коснется графика $f(x)$ в некоторой точке c промежутка

(a;b). Геометрическую точку касания обозначим буквой M, а через MN обозначим касательную к графику $f(x)$, параллельную прямой AB. Очевидно угловые коэффициенты прямых MN и AB (то есть тангенсы углов наклона прямых к оси абсцисс) равны. Угловой коэффициент прямой MN равен $f'(c)$, а угловой коэффициент прямой AB равен ($f(b)$- $f(b)$)/(b-a), и справедлива формула:

$$f'(\text{�}) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Отсюда сразу получается формула (1.1). На приведенном рисунке видно, что могут существовать другие точки, принадлежащие промежутку (a;b), в которых касательные к графику функции $f(x)$ параллельны прямой MN. Производную функции $f(x)$, вычисленную в любой из этих точек, можно подставить в правую часть формулы (1.1) вместо множителя $f'(c)$.

Теорема о монотонности функции

1. Если $f'(x) > 0$ на промежутке (a;b), то на (a;b) функция $f(x)$ возрастает.

2. Если $f'(x) < 0$ на промежутке (a;b), то на (a;b) функция $f(x)$ убывает.

Пусть t_1 и t_2 — любые числа из промежутка (a;b), причем $t_2 > t_1$. Тогда по теореме Лагранжа можно указать такое число c из промежутка (t_1;t_2), для которого справедливо равенство $f(t_2) - f(t_1) = f'(c)(t_2 - t_1)$. Если $f'(x) > 0$ для всех x из промежутка (a;b), то $f'(c) > 0$, и из условия $t_2 > t_1$ следует, что $f(t_2) - f(t_1) > 0$. Таким образом, возрастание функции $f(x)$ на промежутке (a;b) доказано. Аналогично доказывается вторая часть теоремы.

Необходимое условие экстремума функции

Точка x_0 называется **точкой минимума** функции $f(x)$, если можно найти такую окрестность этой точки, что для любой точки x из этой окрестности выполняется условие:

$$f(x) > f(x_0)$$

Точка x_0 называется **точкой максимума** функции $f(x)$, если можно найти такую окрестность этой точки, что для любой точки x из этой окрестности выполняется условие:

$$f(x) < f(x_0)$$

[redacted]

Точки максимума и минимума функции называются **точками экстремума**.

Сформулируем теорему о необходимом условии экстремума функции: если в точке экстремума функция $f(x)$ имеет производную, то производная равна нулю.

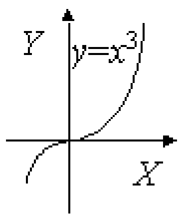

Рисунок 7.3

Отсюда следует, что точки экстремума функции следует искать среди тех точек, где производная функции равна нулю или не существует.

Если $f'(x_0) = 0$, это еще не значит, что в точке x_0 есть экстремум. Примером может служить функция $y=x^3$. В точке $x=0$ её производная равна нулю, но экстремума функция не имеет. График функции изображен на рисунке 7.3.

Точка, в которой производная равна нулю, называется **стационарной**.

Точки, в которых производная либо равна нулю, либо не существует, называются **критическими**

Достаточное условие экстремума

Как было показано выше, с помощью необходимого условия нельзя определить, является ли данная точка точкой экстремума, тем более указать, какой экстремум реализуется — максимум или минимум. Для того, чтобы ответить на эти вопросы, сформулируем и докажем теорему, которая называется **достаточным условием экстремума**.

Пусть функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0. Тогда:

1) если $f'(x) < 0$ на $(a;x_0)$ и $f'(x) > 0$ на $(x_0;b)$, то точка x_0 — точка минимума функции $f(x)$;

2) если $f'(x) > 0$ на $(a;x_0)$ и $f'(x) < 0$ на $(x_0;b)$, то точка x_0 — точка максимума функции $f(x)$;

Докажем первое утверждение теоремы.

Так как $f'(x) < 0$ на $(a;x_0)$ и $f(x)$ непрерывна в точке x_0, то $f(x)$ убывает на $(a;x_0]$, и для любого $x\in(a;x_0)$ выполняется условие $f(x)>f(x_0)$.

Так как $f'(x) > 0$ на $(x_0;b)$ и $f(x)$ непрерывна в точке x_0, то $f(x)$ возрастает на $(x_0;b]$, и для любого $x\in(x_0;b)$ выполняется условие $f(x)>f(x_0)$.

В результате получается, что при любом $x\neq x_0$ из $(a;b)$ выполняется неравенство $f(x)>f(x_0)$, то есть $f(x)$ имеет в точке x_0 минимум.

Второе утверждение теоремы доказывается аналогично.

Приведем другую формулировку достаточных условий экстремума функции.

Если в точке x_0 выполняются условия:

1) $f'(x_0) = 0; f''(x_0) < 0$, тогда x_0 — точка максимума;

2) $f'(x_0) = 0; f''(x_0) > 0$, тогда x_0 — точка минимума;

3) $f'(x_0) = 0$**;** $f''(x_0) = 0$**,** тогда вопрос о поведении функции в точке остается открытым. Здесь может быть экстремум (например в точке $x_0 = 0$ у функции $y = x^4$), но может его не быть (например в точке $x_0 = 0$ у функции $y = x^5$). В этом случае для решения вопроса о наличии экстремума в стационарной точке можно использовать достаточные условия экстремума, приведенные выше.

Экстремумы функции на отрезке

Функция *f(x)*, непрерывная на отрезке [a,b], достигает своего наибольшего и наименьшего значений на этом отрезке. Процедура поиска экстремумов сводится к следующему:

1. Находятся все критические точки функции, *принадлежащие отрезку [a,b];*

2. к ним добавляются точки a и b, являющиеся концами отрезка;
3. во всех найденных точках вычисляются значения функции. Наибольшее из найденных значений является максимумом функции, наименьшее – минимумом.

Пример 1. Найти локальные экстремумы функции $y = x^3 + 3x^2 - 9x + 1$.

Данная функция имеет производную в любой точке, поэтому критическими точками будут только стационарные точки. Найдем их.

$$y' = 3x^2 + 6x - 9 \quad \Rightarrow \quad 3x^2 + 6x - 9 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -3, \quad x_2 = 1$$

Определим, имеются ли в найденных точках экстремумы. В данном случае наиболее простым способом решения этой задачи является нахождение второй производной функции.

$$y'' = \left(3x^2 + 6x - 9\right)' = 6x + 6 \quad \Rightarrow \quad y''(-3) = -12 < 0, \quad y''(1) = 12 > 0$$

Таким образом, точка –3 является точкой локального максимума, а точка 1 – точкой локального минимума. Значения функции в этих точках (локальные экстремумы): *y(-3)=13, y(1)=-4*.

Пример 2. Найти точки локального экстремума функции

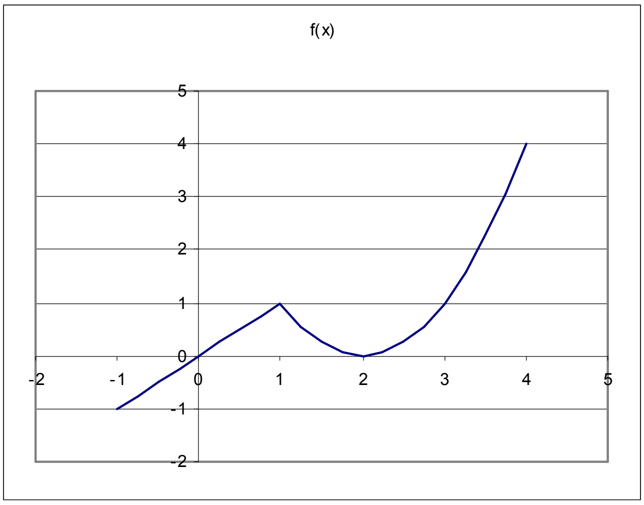

Рисунок 8 График функции из примера 2

$$f(x)=\begin{cases} x, & x\le 1 \\ (x-2)^2, & x>1 \end{cases}$$

Функция непрерывна (смотри рисунок 8).

$$f'(x)=\begin{cases} 1, & x<1 \\ \textit{не существует}, & x=1 \\ 2(x-2), & x>1 \end{cases}$$

У функции две критические точки: $x_1=1$ (где производная не существует), и $x_2=2$, в которой производная равна 0.

Знак первой производной меняется следующим образом.

$$f'(x)>0,\quad x<1$$
$$f'(x)<0,\quad 1<x<2$$
$$f'(x)>0,\quad x<1$$

С учетом изменения знака первой производной функция имеет локальный максимум в точке 1 и локальный минимум в точке 2.

Пример 3. Найти максимальное и минимальное значение функции $y=x^2+2x+3$ на отрезке [-2; 1].

Функция дифференцируема на всей числовой оси. Стационарной является точка *x=-1*. Эта точка принадлежит отрезку [-2; 1]. Таким образом, мы должны вычислить значения функции в трех точках: *f(-2)=3, f(-1)=2, f(1)=6*. Максимум функции на отрезке равен 6 и достигается в точке 1.Минимум равен 2 и достигается в точке (-1).

Пример 4. Найти максимальное и минимальное значение функции $y=x^2-4x+5$ на отрезке [3; 5].

Функция дифференцируема на всей числовой оси. Стационарной является точка *x=2*. Однако, эта точка не принадлежит отрезку [3; 5]. Таким образом, мы должны вычислить значения функции лишь на концах отрезка: *f(3)=2, f(5)=5*. Эти значения являются минимумом и максимумом функции на отрезке соответственно. Вообще, когда функция не имеет на отрезке [a,b] критических точек, то это означает одно из двух: либо она монотонна на (a,b), и ее максимальное и минимальное значения располагаются на краях отрезка, либо она на указанном отрезке является константой.

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ 8.

1) Найти вторую производную функции *f(x)* и вычислить ее значение при указанных *x*:

   a. $f(x) = x^2 \ln x + \cos 2x; \quad f''(1) = ? \quad f''(\pi) = ?$

   b. $f(x) = \sin\frac{x}{3} + \ln x^2; \quad f''(3) = ? \quad f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = ?$

Найти точки экстремума функций:

2) $y = \dfrac{x}{\ln x}$

3) $y = \dfrac{\ln x + 2}{x}$

4) $y = x^2 e^{-x}$

5) $y = x^3 e^{-x}$

Найти локальные экстремумы функций:

6) $y = x^2 - \ln(1 + 2x)$

7) $y = x^3 + \dfrac{3}{x}$

8) $y = -x^4 - 8x^2 + 9$

9) $y = x^2 |x|$

10) $y = \begin{cases} x^2 + 6x + 8, & x \le -2 \\ x^2 - 2x - 8, & x > -2 \end{cases}$

Найти максимальное и минимальное значения функций на указанных промежутках:

11. $y = x^3 - 3x^2 + 3x + 2; \ [-2, 2].$

12. $f(x) = 3x^4 + 4x^3 + 1; \ [-2, 1].$

13. $y = x^5 - x^3 + x + 2; \ [-1, 1].$

14. $y = \dfrac{x}{3} + \dfrac{3}{x}; \ [-5, -1].$

15. $y = \dfrac{x}{8} + \dfrac{2}{x}; \ [1, 6].$

16. $f(x) = \dfrac{\sin 2x}{\sin\left(\dfrac{\pi}{4} + x\right)}; \ \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right].$

17. $f(x) = \cos^2 \dfrac{x}{2} \sin x; \ [0, \pi].$

Ответы:

1) **a.** $f''(1) = 3 - 4\cos 2;\quad f''(\pi) = 2\ln\pi - 1;$ **b.** $f''(3) = \dfrac{2}{3} - \dfrac{\sin 1}{9};\quad f''\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{4}{\pi} - \dfrac{1}{18};$ **2)** *x=e* – точка минимума; **3)** *x=1/e* - точка максимума; **4)** *x=0* – точка минимума, *x=2* – точка максимума; **5)** *x=3* – точка максимума; **6)** $y_{\min} = 0{,}25 - \ln 2$ *при* $x = 0{,}5$; **7)** $y_{\max} = -4$ *при* $x = -1$, $y_{\min} = 4$ *при* $x = 1$; **8)** $y_{\max} = 9$ *при* $x = 0$; **9)** $y_{\min} = 0$; *при* $x = 0$ **10)** $y_{\min} = -1$ *при* $x = -3$; $y_{\max} = 0$ *при* $x = -2$; $y_{\min} = -9$ *при* $x = 1$;

11) $y_{\text{наим}} = -24,\ y_{\text{наиб}} = 4.$ 12) $y_{\text{наим}} = 0,\ y_{\text{наиб}} = 17.$

13) $y_{\text{наим}} = 1,\ y_{\text{наиб}} = 3.$ 14) $y_{\text{наим}} = -\dfrac{10}{3},\ y_{\text{наиб}} = -2.$

15) $y_{\text{наим}} = 1,\quad y_{\text{наиб}} = 2{,}125.$ 16) $y_{\text{наим}} = 0,\ y_{\text{наиб}} = 1.$

17) $y_{\text{наим}} = 0,\ y_{\text{наиб}} = 0{,}375\sqrt{3}.$