ЧАСТЬ 1. ОСНОВЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

Тема 1. ВЕКТОРЫ И МАТРИЦЫ

1.1. ВЕКТОРЫ И ДЕЙСТВИЯ С НИМИ

Начальные сведения о векторах. *Вектором* называется упорядоченный набор чисел. Так, (1, 3, 7) есть вектор. Обозначим его кратко *P,* тогда *P* = (1, 3, 7). Числа в векторе с учетом их расположения по номеру в наборе называются *компонентами* вектора. Так, в векторе P число 1 есть 1-я компонента, число 3 — 2-я, число 7 — 3-я компонента. Число компонент вектора называется его *размерностью.* Следовательно, *P* — трехмерный вектор. Вектор должен иметь не менее двух компонент. «Вектор», имеющий только одну компоненту, называется *скаляром*, то есть обычным числом, а не вектором. Для того, чтобы отличать скаляры от векторов в математической записи, для них придуманы различные обозначения. Скаляры обычно обозначаются строчными буквами латинского алфавита, например: x, y, a, b. В отдельных случаях для этого используются также строчные буквы греческого алфавита: α, λ и др. Векторы при рукописной записи часто обозначаются латинскими буквами со стрелочкой наверху или прописными буквами, например: $\vec{a}$, A. При типографском способе печати появляется возможность выделять вектор жирным шрифтом, например: ***a*** – это вектор, а *a* – скаляр. В этой книге для обозначения векторов будут преимущественно использоваться жирные или заглавные буквы.

Пример 1. Пусть в избирательных округах A, B и C прошли выборы в президенты страны, в которых участвовало 3 кандидата. Пусть в округе A первый кандидат набрал 1000 тыс. голосов, второй – 800 тыс. голосов, а третий – 2000 тыс. голосов. Тогда результаты голосования можно описать вектором A=(1000, 800, 2000). Аналогичным образом, результаты голосования в округах B и C можно представить векторами B=(1500, 1200, 1000) и C=(500, 400, 3000). Если нас интересуют суммарные результаты по округам B и C, то необходимо покомпонентно сложить векторы B и C. В результате получим новый вектор: D = B+C = (1500+500, 1200+400, 1000+3000)=(2000, 1600, 4000). Можно заметить, что компоненты вектора D ровно в 2 раза больше соответствующих компонент вектора A. Этот факт мы можем выразить математически в виде D = 2A.

Приведенные выше векторы A, B, C, D — это примеры конкретных векторов. Произвольный трехмерный вектор можно обозначить (x_1, x_2, x_3) или кратко $\boldsymbol{x}$. В векторе $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$ компонента x_1 есть 1-я компонента, x_2 — 2-я, x_3 — 3-я. Произвольный четырехмерный вектор можно обозначить (x_1, x_2, x_3, x_4), и если n — какое-нибудь натуральное число, то $(x_1, \ldots, x_n)$ обозначает произвольный n-мерный вектор.

Векторы бывают двух видов — *векторы-строки* и *векторы-столбцы.* Все вышеприведенные векторы были векторами-строками. Векторы-строки записываются в виде упорядоченной строки, векторы-столбцы записываются в виде упорядоченного столбца (нумерация компонент вектора-столбца идет сверху), например: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}$

По типографским соображениям удобнее иметь дело с векторами-строками. Однако иногда необходимо использовать векторы-столбцы.

Векторы широко используются во всех областях науки, в том числе и в политической. Многие обозначения при использовании векторов очень компактны, при этом не теряют в наглядности и содержательности.

2. Действия с векторами. В примере 1 мы уже умножали вектор на число. Действительно, D = 2A.. В этом же примере мы сложили два вектора B и C и получили их сумму *D.* Действия с векторами очень естественны и весьма напоминают обычные действия с числами. Можно сказать, что действия с векторами являются естественным распространением действий над числами на более широкую область.

Любой вектор можно умножить на любое число. Для этого каждая компонента вектора умножается на это число, и эти произведения образуют вектор-результат.

Умножим вектор $\boldsymbol{v}$ = (2, 3) на 3. Получим вектор (6, 9). Его естественно обозначить 3$\boldsymbol{v}$.

Умножим вектор A=(1000, 800, 2000). на 2. Получим вектор (2000, 1600, 4000), равный *D*.

Любые два вектора одной размерности *можно сложить.* Для этого складываются первые компоненты, затем вторые и т.д. Эти суммы образуют вектор-результат.

Сложим вектор A=(1000, 800, 2000) и вектор D=(2000, 1600, 4000). Получим вектор *K*= (3000, 2400, 6000). Проверьте, что *K* = 3A. Однако векторы разной размерности складывать нельзя.

Операции умножения вектора на число и сложения векторов обладают следующими свойствами:

а) сложение векторов ассоциативно, т.е. $(X+ Y)+Z=X+(Y+ Z)$ — это свойство позволяет складывать любое конечное число векторов (так, мы только что нашли сумму трех векторов К = А + В + С);

б) сложение векторов распределительно по отношению к умножению на число, т.е. $k(X + Y) = kX + kУ$.

Примечание 1. Вообще-то в математике понятие «вектор» многозначно. Уже в школе в курсе физики вектор понимался как направленный отрезок определенной длины с фиксированным началом. Известное из школьного курса правило сложения векторов (правило параллелограмма) нисколько не противоречит введенному выше формализму, оно как раз и означает, что компоненты векторов складываются. В геометрии иногда под вектором понимается преобразование плоскости или пространства специального вида (перемещение).

Не будем описывать некоторые дальнейшие свойства операций над векторами, скажем лишь еще раз о сходстве операций над векторами с обычными операциями над числами.

Но есть и некоторые отличия операций над векторами от операций над числами. Так, для любых чисел *a* и *b* можно узнать, «во сколько раз» *a* больше *b,* т.е. найти *a/b.* Но для двух векторов это сделать, в общем, нельзя. Например, для $E = (7, 1)$ и $N = (1, 5)$ нет такого *k,* чтобы $E = kN$.

Два вектора называются *равными,* если они равны покомпонентно, т.е. если равны их первые компоненты, вторые и т.д. Итак, если $X = (x_1, \ldots, x_n)$, $Y = (y_1, \ldots, y_n)$, то $X = Y$, если и только если $x_1 = y_1; \quad x_2 = y_2; \quad \ldots; \quad x_n = y_n$. Как видно из определения равенства, лишь для векторов одинаковой размерности можно говорить о равенстве или неравенстве этих векторов. Для векторов разной размерности говорить об их равенстве бессмысленно.

Пусть *X, Y* — векторы одинаковой размерности, тогда $X \le Y$, если и только если $x_1 \le y_1; \quad x_2 \le y_2; \quad \ldots; \quad x_n \le y_n$. Например, $X \ge Y$, если $X = (7, 2, 0)$ и У= (5, 1, 0). Но векторы *X* и *Z*= (3, 10, 0) несравнимы: ни одно из возможных соотношений $X \le Y$, $X = Y$, $X \ge Y$ не верно.

Иногда вектор удобно записывать так: $X = (x_i)$, где x_i обозначает произвольную компоненту вектора *X.*

Описанные действия с векторами были иллюстрированы на примере векторов-строк. Действия с векторами-столбцами точно такие же, в результате получаются, конечно, также векторы-столбцы. Пусть $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$,

тогда $2X = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$ и т.д.

Векторы-строки и векторы-столбцы одинаковой размерности связаны операцией *транспонирования.* Она превращает вектор-строку в вектор-столбец и, наоборот, вектор-столбец в вектор-строку. Эта операция обозначается верхним индексом ^{т}. Пусть U= (2, 3), тогда $U^T = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$; пусть $V = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \end{pmatrix}$, тогда $V^T = (-1, \quad 6)$. Легко понять, что операция транспонирования, осуществленная последовательно дважды, дает исходный вектор: $\left(X^T\right)^T = X$, каков бы ни был вектор X — строка или столбец.

Скалярное произведение векторов. Пусть $X = \left(x_1, \ldots, x_n\right)$, $Y = \left(y_1, \ldots, y_n\right)$ — векторы одинаковой размерности, тогда число $\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n$ называется *скалярным произведением* векторов X *и* Y и обозначается $X \cdot Y$. Приведем без доказательств (они очень просты) свойства скалярного произведения: *а)* $X \cdot Y = Y \cdot X$*;* б) $X \cdot \left(Y + Z\right) = X \cdot Y + X \cdot Z$*;* в) $X \cdot (kY) = k(X \cdot Y)$ для любых векторов *X, Y* и любого числа *k.*

3. Линейные пространства. Линейная зависимость и независимость векторов. Пусть R^n обозначает множество всех n-мерных векторов-строк. Заметим, что это множество имеет ряд важных свойств. Именно любой вектор $X \in R^n$ можно умножить на любое число k и результат — вектор kX есть снова элемент множества R^n. Сумма двух и даже любого конечного числа векторов из R^n снова есть элемент R^n. Кроме того, операции умножения вектора на число и сложения векторов связаны друг с другом определенными соотношениями (см. п. 2).

Еще одним важным свойством множества R^n является наличие в нем уникального нулевого вектора $\vec{0} = \left(0, \ldots, 0\right)$. Его роль вполне аналогична роли числа 0 во множестве действительных чисел. Так, $\vec{0} \cdot X = \vec{0}$; $\vec{0} + X = X$ для любого $X \in R^n$. Вектор *X,* удовлетворяющий неравенству $X \geq \vec{0}$, называется *неотрицательным.* Неотрицательный вектор — это в точности тот, все компоненты которого неотрицательны. Вектор (2, 3) является неотрицательным, а вектор (-2, 4) — нет, ибо его 1-я компонента не является неотрицательным числом.

Множество R^n, удовлетворяющее всем вышеперечисленным свойствам называют n-мерным числовым (или арифметическим) линейным пространством. Слово «числовое» в названии линейного пространства подчеркивает, что элементами такого пространства являются векторы, компоненты которых являются числами.

Вектор $B=\left(b_1,\ldots,b_n\right)$ называется *линейной комбинацией* векторов $A_1=\left(a_{11},\ldots,a_{1n}\right),\ \ \ldots,\ \ A_m=\left(a_{m1},\ldots,a_{mn}\right)$ той же размерности, если найдутся числа $x_1,\ldots.,x_m$ такие, что $B=x_1A_1+\ldots+x_mA_m$. Чтобы узнать, существуют ли такие числа, надо решить систему из *n* линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) с *m* неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+\ldots+a_{1m}x_m=b_1 \\ a_{21}x_1+\ldots+a_{2m}x_m=b_2 \\ \qquad\qquad \ldots \\ a_{n1}x_1+\ldots+a_{nm}x_m=b_n \end{cases}$$

Узнаем, например, является ли вектор *F*= (1, 6) линейной комбинацией векторов $G_1=(1,2),\ \ G_2=(0,2)$. Получаем совсем простую СЛАУ:

$$\begin{cases} \qquad x_1=1 \\ 2x_1+2x_2=6 \end{cases}$$

Ее решение: $x_1=1,\ \ x_2=2$. Следовательно, $F=G_1+2G_2$.

Система векторов называется *линейно зависимой,* если какой-либо вектор системы есть линейная комбинация остальных векторов системы, и *линейно независимой* в противном случае, т.е. когда никакой вектор системы не является линейной комбинацией остальных векторов системы.

Например, система из трех вышеприведенных векторов F,G_1,G_2 линейно зависима, ибо $F=G_1+2G_2$.

Пусть $\triangleq$ — какая-нибудь система векторов, тогда ее подсистема $\sqcup$ называется *базисом* этой системы, если $\sqcup$ линейно независима, и любой вектор системы $\triangleq$ есть линейная комбинация векторов из $\sqcup$.

Пусть $\sqcup = (E_1, ..., E_n)$. Если $B \in \triangleq$, то $B = \lambda_1 E_1 + ... + \lambda_n E_n$ при некоторых $\lambda_1, ..., \lambda_n$. Линейная комбинация $\lambda_1 E_1 + ... + \lambda_n E_n$ называется разложением вектора *B* по векторам $E_1, ..., E_n$, а числа $\lambda_1, ..., \lambda_n$ называются *коэффициентами* этого разложения.

Эти коэффициенты называются *координатами* вектора в базисе $\sqcup$.

Теорема 1. ***Любая система векторов имеет хотя бы один базис. Число элементов в любом базисе данной системы одно и то же. Координаты любого вектора в базисе определяются однозначно.***

Теорема 2. ***В пространстве R^n любая система векторов в количестве более n является линейно зависимой.***

Пример 2. Укажем базис в пространстве R^n. Его образуют векторы E_1 = (1, 0, ..., 0), E_2 = (0, 1, ... 0), ..., E_n = (0, 0, ..., 1).

Докажем, что $\sqcup = (E_1, ..., E_n)$ есть базис.

Система $\sqcup$ — линейно независимая система. Действительно, предположим, что, например, E_1 есть линейная комбинация векторов $E_2, ..., E_n$, т.е. $E_1 = \lambda_2 E_2 + ... + \lambda_n E_n$. Сравнивая первые компоненты вектора E_1 и линейной комбинации $\lambda_2 E_2 + ... + \lambda_n E_n$ получаем противоречие: $1 = \lambda_2 \cdot 0 + ... + \lambda_n \cdot 0$, т.е. таких λ_i не существует.

Пусть $B = (b_1, ..., b_n)$ — произвольный вектор из R^n. Как легко видеть, $B = b_1 E_1 + ... + b_n E_n$, т.е. вектор *B* представим в виде линейной комбинации векторов системы $\sqcup$ и компоненты вектора *B* есть его координаты в этом базисе.

4. Пространство **товаров, вектор цен.** Под *товаром* понимаются некоторое благо или услуга, поступившие в продажу в определенное время и в определенном месте. Будем считать, что имеется n различных товаров, количество i-го товара обозначается x_{i}, тогда некоторый набор товаров обозначается $X = (x_1, \ldots x_n)$, т.е. является n-мерным вектором. Будем рассматривать, только неотрицательные количества товаров, так что для любого $\text{i} = 1, \ldots, n \quad x_{\text{i}} \geq 0$ или $X \geq 0$. Множество всех наборов товаров называется *пространством товаров С.* Это множество называется пространством потому, что в нем можно сложить любые два набора и умножить любой набор товаров на любое неотрицательное число. Возможность умножения набора товаров на любое неотрицательное число отражает предположение о безграничной делимости и умножении товаров (т.е. товары устроены наподобие сахарного песка, а не автомобилей).

В дальнейшем предполагаем, что каждый товар имеет *цену.* Все цены предполагаются строго положительными. Пусть цена единицы i-го товара есть p_i тогда вектор $P = (p_1 ,\ldots, p_n)$ есть *вектор цен.*

Набор товаров, как вектор, имеет ту же размерность, что и вектор цен. Для набора товаров $X = (x_i)$ и вектора цен $P = (p_i)$ их скалярное произведение $P\ X= p_1x_1 +\ldots + p_nx_n$ есть число, называемое ценой набора или его стоимостью, и будет обозначаться c(X).

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ 1.

1. Предвыборная кампания трех кандидатов оплачивается из партийной кассы. Денежные средства выделяются по трем позициям: печать агитационных листовок, публикации в периодической печати, выступления по телевизору. Совокупность денежных средств по этим трем позициям составляет вектор денежных средств кандидата i. Обозначим его через A_{i}. Имеют ли смысл (и какой именно) векторы $A_1 + A_2, \quad A_1 + A_2 + A_3$?
2. Для обеспечения обороноспособности страны на боевом дежурстве постоянно находятся некоторое количество стратегических бомбардировщиков (первая компонента вектора) и стратегических подводных лодок (вторая). Их количество зависит от уровня внешней угрозы u и задается по формуле: (1+u)(10, 2). Определите, сколько бомбардировщиков и подводных лодок находятся на боевом дежурстве при уровнях внешней угрозы 0, 1 и 2.
3. Пусть членство страны в трех международных организациях описывается трехмерным вектором, компоненты которого равны 1, если страна является членом

соответствующей организации, и 0 – в противном случае. Пусть в 1990 году вектор был равен A=(0, 1, 0), а в 2000 году B=(0, 1, 1). Чему равен и какой имеет смысл вектор B-A?

4. Укажите те пары λ и μ из приведенных далее, когда вектор A является неотрицательным.

4.1. $A = \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -5 \\ 6 \end{pmatrix}$ $\quad (1,1), \quad (-1,2), \quad (2,-1), \quad (3,1)$

4.2. $A = \lambda \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \end{pmatrix}$ $\quad (1,1), \quad (-1,2), \quad (2,-1), \quad (5,2)$

4.3. $A = \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \end{pmatrix}$ $\quad (1,1), \quad (-1,2), \quad (2,-1), \quad (-1,-1), \quad (3,1)$

5. Пусть имеется три пяти продуктовых корзины, рассчитанных для трех категорий граждан: с низким, средним и высоким уровнями доходов. Корзины описаны пятимерными векторами: A=(15, 10, 5, 0, 0); B=(10, 20, 10, 5, 0); C=(1, 5, 15, 10, 5), компоненты которых, указывают норму потребления одного из продуктов питания. Пусть вектор цен на продукты равен (5, 7, 10, 15, 30).

   5.1. Подсчитайте стоимость каждой корзины.

   5.2. Через год цены изменились. Новый вектор цен P=(8, 10, 10, 20, 50). Подсчитайте на сколько процентов изменилась цена каждой корзины и в какую сторону?

6.

Ответы

2) (10, 2), (20,4),(30, 6); **3)** (0, 0, 1); **4.1)** (2, -1), (3, 1); **4.2)** (2, -1), (5, 2); **4.3)** (3, 1);

Матрицы и действия с ними

1 Начальные сведения о матрицах. Матрицей называется прямоугольная таблица чисел. Так матрица **A,** состоящая из p строк и q столбцов

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1q} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2q} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{p1} & a_{p2} & a_{p3} & \dots & a_{pq} \end{pmatrix}.$$

является матрицей размерности $p \times q$ (первым всегда указывается число строк, вторым – число столбцов). Числа, стоящие внутри матрицы называются ее элементами и обозначаются теми же буквами, что и матрица, но строчными. Запись a_{ij} означает элемент, стоящий на пересечении i-ой строки и j-го столбца. Можно пользоваться сокращенной формой записи:

$$\mathbf{A} = (a_{ij}) = \|a_{ij}\|; \quad i = 1, 2, 3, \dots, p; \quad j = 1, 2, 3, \dots, q.$$

Вектор-строка является частным случаем матрицы, имеющей только одну строку. Вектор-столбец является частным случаем матрицы, имеющей только один столбец. Таким образом, матрица является расширением понятия вектора. Любую прямоугольную матрицу, имеющую не менее двух строк и столбцов, можно считать состоящей из векторов-строк или векторов-столбцов.

Рассмотрим матрицу А размерами $m \times n$.Каждую ее строку можно считать вектором-строкой размерности *n*, а каждый столбец – вектором-столбцом размерности *m*. Обозначим i-ю строку матрицы посредством $\vec{a}_i$, а j-й столбец – A_j. Тогда

$$A = \begin{pmatrix} \vec{a}_1 \\ \vdots \\ \vec{a}_m \end{pmatrix} = \left(A_1, \ldots, A_n \right)$$

Если число строк равно числу столбцов, то матрица называется квадратной. В квадратной матрице элементы a_{ii} образуют главную диагональ матрицы. Если в квадратной матрице все элементы главной диагонали равны единице, а остальные элементы нули, то матрица называется **единичной**. Так $E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ есть единичная матрица размера 3. В каждой размерности есть своя единичная матрица.

Две матрицы называются **равными**, если они имеют одинаковую размерность (то есть они имеют одинаковое количество строк и столбцов) и в них одинаковые места заняты равными числами.

2 Действия с матрицами. Эти действия напоминают действия с векторами. Пусть $\mathbf{A} = (a_{ij})$ – некоторая матрица и α – произвольное число, тогда $\alpha\mathbf{A} = (\alpha a_{ij})$, то есть **при умножении матрицы А на число α все числа, составляющие матрицу А, умножаются на число α.** Например, умножим матрицу $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ на число 2. Получим $2A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -10 \\ 6 & 2 & -2 \end{pmatrix}$, т.е. при умножении матрицы на число множитель «вносится» под знак матрицы.

Пусть **A** и **B** – матрицы одинаковой размерности **A** = (a_{ij}), **B** = (b_{ij}), тогда их сумма **A** + **B** – матрица **C** = (c_{ij}) той же размерности, определяемая из формулы $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, то есть **при сложении двух матриц попарно складываются одинаково расположенные в них числа**. Матрицы разных размерностей складывать нельзя.

Матрицу A можно умножить на матрицу B, то есть найти матрицу C = AB, если существует скалярное произведение строки матрицы A на столбец матрицы B, то есть если число столбцов *n* матрицы A равно числу строк матрицы B. При этом матрица C будет иметь столько строк, сколько строк у матрицы A и столько столбцов, сколько столбцов у матрицы B. Каждый элемент матрицы **C** определяется формулой

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

То есть элемент c_{ij} матрицы-произведения C, стоящий на пересечении i-ой строки и j-го столбца равен скалярному произведению i-ой строки матрицы A и j-го столбца матрицы B.

Из сказанного следует, что если можно найти произведение матриц **AB**, то произведение **BA**, вообще говоря, не определено.

Приведем примеры перемножения матриц:

$$1)\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & -3 \\ 4 & -2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -4 \\ 6 & 2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1\cdot 2 + 2\cdot 1 + 33\cdot 6 + 4\cdot(-3) & 1\cdot 5 + 2\cdot(-4) + 3\cdot 2 + 4\cdot(-1) \\ 2\cdot 3 + 1\cdot 1 + (-1)\cdot 6 + (-3)\cdot(-3) & 2\cdot 5 + 1\cdot(-4) + (-1)\cdot 2 + (-3)\cdot(-1) \\ 4\cdot 5 + (-2)\cdot(-4) + 3\cdot 2 + 1\cdot(-1) & 4\cdot 5 + (-2)\cdot(-4) + 3\cdot 2 + 1\cdot(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & -1 \\ 10 & 7 \\ 25 & 31 \end{pmatrix};$$

$$2)\ \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = (8, 4).$$

Если **AB** и **BA** одновременно определены, то, вообще говоря, эти произведения не равны. Это означает, что **умножение матриц не коммутативно**. Продемонстрируем это на примере.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 & 34 \\ 31 & 46 \end{pmatrix}.$$

Для алгебраических действий над матрицами справедливы следующие законы:

1) **A** + **B** = **B** + **A**;

2) α(**A** + **B**) = α**A** + α**B**;

3) (**A** + **B**) + **C** = **A** + **(B** + **C)**;

4) (**AB**)***C*** = **A**(**BC**);

5) **A**(**B** + **C**) = **AB** + **AC**.

Операция транспонирования матрицы аналогична транспонированию векторов. При ее осуществлении строки исходной матрицы переходят в столбцы транспонированной. Конкретно ее можно осуществлять так. Берется первая строка исходной матрицы и переписывается сверху вниз в качестве первого столбца транспонированной матрицы. Затем берется вторая строка и переписывается в качестве второго столбца и т.д. Для квадратной матрицы операцию транспонирования удобно осуществлять путем зеркального отображения элементов матрицы относительно ее главной диагонали. Диагональные элементы при этом не изменяются. Примеры:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 4 & 2 & 7 \\ 6 & -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ -1 & 2 & -2 \\ 5 & 7 & 3 \end{pmatrix}$$

3. Матрицы и линейные преобразования. Рассмотрим какое-нибудь числовое линейное пространство, например двумерное R^2. Тогда любая квадратная матрица А размера 2 задает линейное преобразование α: $R^2 \to R^2$ по правилу: α(X)=AX. Линейность преобразования α означает, что α*(aX+bY)=a*(α*X*)+*b*(α*Y)*, для любых векторов X и Y и любых чисел *a* и *b*. В частности отсюда следует, что нулевой вектор переходит в себя.

Пример 1. Единичная матрица задает тождественное преобразование пространства на себя. Действительно,

$$E_2X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot x_1 + 0\cdot x_2 \\ 0\cdot x_1 + 1\cdot x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = X$$

Пример 2. Матрица $M_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ умножает вектор на число λ:

$$M_\lambda X = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda\cdot x_1 + 0\cdot x_2 \\ 0\cdot x_1 + \lambda\cdot x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \lambda X$$

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ 2.

1. Сложить матрицы и подсчитать сумму элементов первого столбца матрицы-результата: $\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = ?$
2. Пусть C=A – B. Подсчитать сумму всех элементов матрицы C. $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$
3. Пусть A=BC. Каков размер матрицы A, если: $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}$
4. В условиях предыдущей задачи вычислить a_{12}
5. В условиях задачи 3 вычислить сумму элементов второй строки матрицы А.
6. Справедливо матричное равенство: AX=B. Причем матрица А имеет размеры 5x3, а матрица В – 5x4. Каковы размеры матрицы X?
7. Пусть $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}$. Найти сумму элементов второго столбца матрицы C^T.
8. Пусть $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$. Найти сумму элементов второго столбца матрицы AA^T.
9. Пусть $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$. Найти матрицу A-2E.
10. Найти элемент d_{12} матрицы D=ABC, если $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}, \quad C^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

11. Возвести в квадрат матрицу $A=\begin{pmatrix}1 & -3\\ 3 & 1\end{pmatrix}$ $\quad (A^2=AA)$

12. Возвести в третью степень матрицу из предыдущей задачи.

13. Пусть $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -2 & 1\end{pmatrix}$. Убедитесь, что AB=BA=E. Такие матрицы называются обратными и обозначаются $A=B^{-1}$, $B=A^{-1}$.

14. Докажите, что преобразование, задаваемое матрицей $M_1=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, переставляет компоненты любого вектора.

15. Докажите, что преобразование, задаваемое матрицей $M_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$, оставляет первую компоненту вектора неизменной, а вторую делает суммой обеих прежних компонент.

16. Для пространства R^3 напишите матрицы, которые а) умножает первую компоненту на 3, вторую - на 2, третью оставляет неизменной; б) первую компоненту оставляет неизменной, вторую делает суммой первых двух, а третью суммой всех трех прежних компонент.

ОТВЕТЫ

1) 10, **2)** 0, **3)** 2x4, **4)** –1, **5)** 40, **6)** 3x4, **7)** 20, **8)** 24, **9)** $\begin{pmatrix}1 & 4\\ 0 & 5\end{pmatrix}$, **10)** –7,

11) $\begin{pmatrix}-8 & 0\\ 0 & -8\end{pmatrix}$, **12)** $\begin{pmatrix}-8 & 24\\ -24 & 8\end{pmatrix}$, **16)** $\begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$.