



Количественные методы в финансах

**Доходность облигаций.
Дюрция.**

Доходность облигаций

Под доходностью финансовой операции понимается величина

$$y = \frac{F - P}{P}$$

где F – цена продажи актива, а P – цена покупки актива.

Доходность к погашению облигаций без права досрочного погашения YTM (Yield to maturity) численно равна ставке сложных процентов, при которой прогнозируемый денежный поток равен текущей стоимости облигации .

$$PV = \sum_{i=1}^n \frac{C_i}{(1+y)^i} + \frac{FV}{(1+y)^n} \quad , \text{ где } C_i = \frac{g}{m} FV$$

Доходность облигации

Аналитического решения такой задачи, за исключением простейших случаев не существует. Для решения уравнения

$$PV = \sum_{i=1}^n \frac{C_i}{(1+y)^i} + \frac{FV}{(1+y)^n}$$

используются численные методы в Excel это функция ВСД.

Доходность до погашения YTM является обещанной доходностью, если облигация сохраняется до срока погашения и купоны реинвестируются по этой процентной ставке.

Доходность равна наращенной сумме купонных платежей по годовой ставке сложных процентов

$$\sum_{i=1}^N C_i (1+y)^{T-i} = \left(\sum_{i=1}^N \frac{C_i}{(1+y)^i} \right) \cdot (1+\bar{r})^T$$

Риск от инвестиций в облигацию, возникает, если будущие ставки реинвестирования будут ниже внутренней ставки доходности

Доходность облигации

Пример. Двухгодичная облигация с купоном 8%, выплачиваемым раз в год торгуется по цене 920 руб. Найти доходность до погашения. Номинал облигации равен 1000 руб.

Решение.

$$920 = \frac{80}{1+y} + \frac{80}{(1+y)^2} + \frac{1000}{(1+y)^2}$$

Обозначим $x = \frac{1}{1+y}$ тогда получим:

$$1080 \cdot x^2 + 80 \cdot x - 920 = 0$$

Решив это квадратное уравнение получим:

$$YTM = 12,8\% \quad y_1 = 0,128$$

Если имеется вероятность того, что проценты не будут выплачены или возможна задержка в выплатах купона, то ожидаемая доходность будет меньше YTM.

Если облигация торгуется по номиналу, то ее доходность равна купонной ставке.

Доходность до погашения. YTM.

Пример. Найти YTM для облигации номиналом 1000 руб, купоном в 8%, выплачиваемому раз в год для различных сроков до погашения: 4 года, 6 лет, 10 лет, 15 лет. Облигация торгуется по цене 900 руб.

Решение. Для решения задачи составим таблицу потоков платежей по облигациям и применяя функцию Excel ВСД, получим.

Пе- риоды	платежи	платежи	пла- тежи	пла- тежи	пла- тежи	YTM
0	-900	-900	-900	-900	-900	
1	80	80	80	80	80	
2	80	80	80	80	80	
3	80	80	80	80	80	
4	80	1080	80	80	80	11,240%
5			80	80	80	
6			1080	80	80	10,317%
7				80	80	
8				80	80	
9				80	80	
10				1080	80	9,600%
11					80	
12					80	
13					80	
14					80	
15					1080	9,260%

Доходность к погашению облигации уменьшается с ростом срока до погашения.

Текущая доходность – CY .

Доходность CY не учитывает номинал FV и срок до погашения и применима при длительных сроках погашения и при малых изменениях процентной ставки

$$CY = \frac{C}{PV}$$

Простая доходность – SY.

Простая доходность учитывает время до погашения, но не учитывает сложный процент. Простая доходность рассчитывается по формуле

$$SY = \frac{C + \frac{F - PV}{My}}{PV} = \frac{C}{PV} + \frac{F - PV}{My \cdot PV} = CY + \frac{F - PV}{My \cdot PV}$$

Пример. Доходности

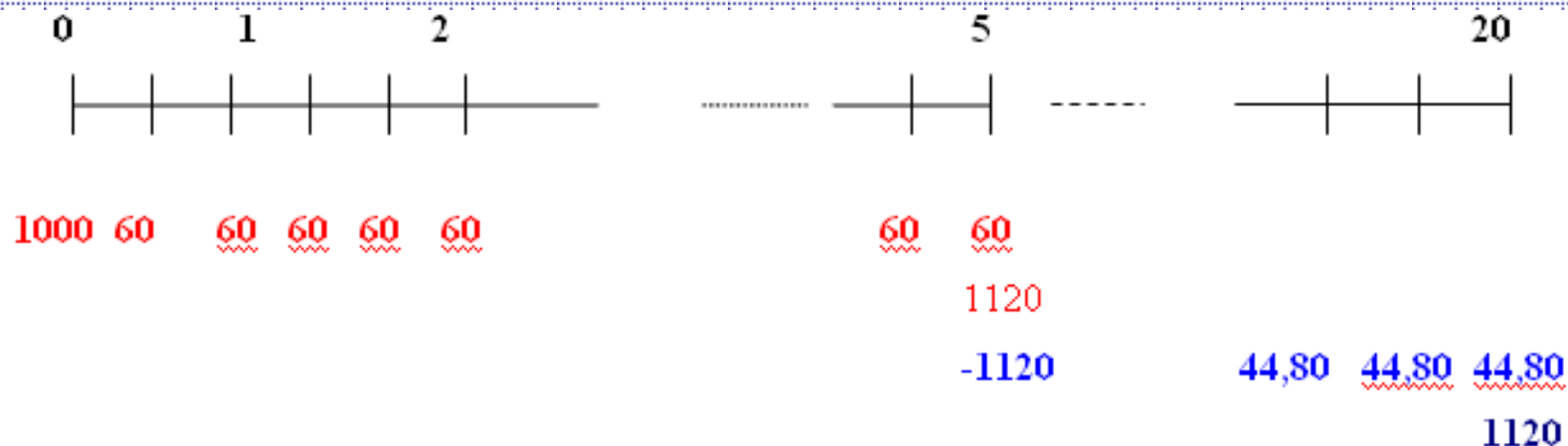
Пример 5. Пусть имеется 4 летняя облигация с купоном 8,5%, номиналом \$100. Текущая процентная ставка равна 8,17%. Найти доходность до погашения YTM, если облигация продается по цене \$110, по цене \$90 и \$100. Сравнить текущую – CY, простую - SY и доходность до погашения.

текущая процент ная ставка	цена	YTM	текущая доходно сть CY	Простая доходно сть SY	YTM- CY	YTM- SY
8,17%	90	11,78%	9,44%	12,22%	2,34%	-0,44%
	100	8,50%	8,50%	8,50%	0,00%	0,00%
	110	5,68%	7,73%	5,45%	-2,05%	0,23%
	101,09	8,17%	8,41%	8,14%	-0,24%	0,03%

Доходность облигаций с правом досрочного погашения

Пример. Фирма эмитировала отзывные облигации на 20 лет с 12% купоном и номиналом 1000. Фирма предполагает погасить через 5 лет по цене 1120 и заменить новыми облигациями с купоном 8%. Выплата купонов два раз в год. Найти YTC.

Структура платежей по облигации имеет вид



Доходность облигаций с правом досрочного погашения

На рынке существуют облигации, которые эмитируются с правом **досрочного отзыва**.

Например, фирма эмитировала отзывные облигации с 12% купоном и номиналом 1000. Если процентные ставки (спот) упали до 8%, то фирме удобно погасить эти облигации, заменив их 8% облигациями. На каждой облигации фирма экономит $\Delta P = 1000(0,12 - 0,08) = 40$.

Как владение такими облигациями скажется на доходности для инвестора?

Для таких облигаций доходность оценивается как доходность к моменту отзыва (Yield to call) YTC.

Определяющим является **выкупная цена**, а не **номинал** как для расчета YTM и **число периодов купонных** выплат до выкупа.

Доходность облигаций с правом досрочного погашения

Доходность YTC находится из решения уравнения

$$\begin{aligned} 1000 &= \sum_{i=1}^{10} 60 \left(\frac{1}{1+y_c} \right)^i + 1120 \cdot \left(\frac{1}{1+y_c} \right)^{10} + \sum_{i=1}^{40} 44,80 \frac{1}{(1+y_c)^i} + 1120 \frac{1}{(1+y_c)^{40}} = \\ &= \frac{60}{y_c} \left(1 - \frac{1}{(1+y_c)^{10}} \right) + \frac{1120}{(1+y_c)^{10}} + \frac{44,8}{y_c} \left(1 - \frac{1}{(1+y_c)^{40}} \right) + 1120 \frac{1}{(1+y_c)^{40}} \end{aligned}$$

Решение задачи находится с применением численных методов или с помощью функции Excel ВСД (внутренняя ставка доходности).

$\text{ВСД}(\{-1000; 60; 60; \dots; 44,80; 44,80 \dots 1164,8\}) = 5,27$ за период.

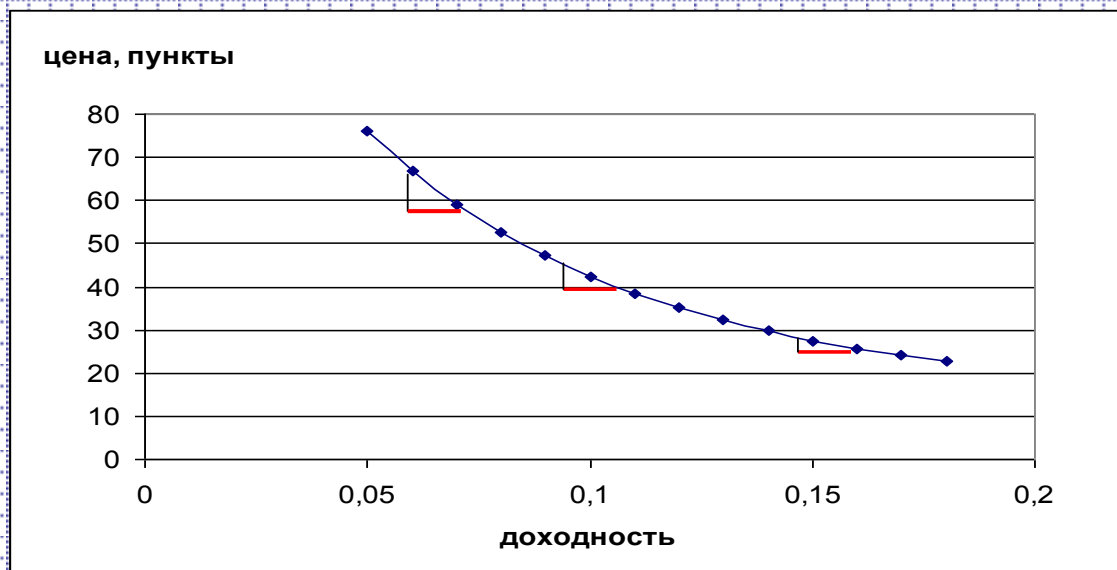
За год YTC = $2 \cdot 5,27 = 10,54$

В результате доходность от владения облигацией с правом досрочного отзыва составит не 12%, а 10,54% или уменьшится на 1,46%.

Налогообложение существенно снижает доходность от владения облигацией.

Риск облигации

Облигации торгуются на фондовых рынках. Цена облигации зависит от процентной ставки.



Ценовой риск уменьшается с ростом доходности. Ценовой риск измеряется на 1% изменения доходности.

$$R_p = - \frac{\Delta P}{\Delta r}$$

При малых изменениях доходности ценовой риск равен

$$R_p = - \frac{\partial P}{\partial r}$$

Риск облигации

Цена облигации относительно кривой доходности равна

$$P = \sum C_t (1+r)^{-t}$$

$$\frac{\partial P}{\partial r} = - \sum t C_t (1+r)^{-t-1} = - \sum \frac{C_t}{(1+r)^t} \frac{t}{(1+r)}$$

Выполнив некоторые преобразования получим:

$$\frac{\frac{\partial P}{\partial r}}{\frac{P}{(1+r)}} = - \sum_{t=1}^N \frac{C_t}{(1+r)^t P} t = - \sum_{t=1}^N w_t t = D$$

$$D = - \frac{\partial P / P}{\partial r / (1+r)} \quad \text{или} \quad D = - \frac{\Delta P / P}{\Delta r / (1+r)} \quad w_t = \frac{C_t}{(1+r)^t P}$$

Риск облигации. Дюрация.

Изменение цены облигации при малых изменениях процентной ставки равно

$$\frac{\Delta P}{P} = -D \frac{\Delta r}{1+r}$$

D – дюрация облигации. (дюрация Макколея)

Дюрация рассчитывается по формуле

$$D = \sum_{t=1}^T t w_i = \sum_{t=1}^T t \frac{C_i}{P(1+r)^i}$$

Чувствительность цены облигации к изменению процентной ставки у различных активов разная

Краткосрочные активы имеют дюрацию близкую к нулю. Среднесрочные более чувствительны к изменению ставки процента. Долгосрочные активы имеющие высокую дюрацию более всего чувствительны к изменению процентной ставки.

Дюрация.

Существует несколько определений «экономического» смысла дюрации.

- *Дюрация является средним моментом, характеризующим структуру потока платежа.*
- *Дюрация - средневзвешенный срок поступления платежей в поток наличности. Весовым коэффициентом при этом служат текущие стоимости этих поступлений.*
- *Дюрация – это временная точка в будущем, находясь в которой инвестор получит половину своего первоначального вклада, скорректированного с учетом временной стоимости денег*

Расчет дюрации

Дюрация рассчитывается для любого положительного потока платежей

$$D = \sum_{t=1}^N \omega_t \cdot t \quad \omega_t = \frac{C_t}{(1+y)^t P} \quad \sum_{t=1}^N \omega_t = 1$$

Для дюрации можно получить аналитическое выражение. Найдем первую производную от стоимости облигации по формуле

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{gF}{y^2} + \frac{gF}{y(1+y)^N} \left(\frac{1}{y} + \frac{N}{1+y} \right) - \frac{FN}{(1+y)^{N+1}}$$

Подставим в выражение для дюрации

$$D = -\frac{1}{P} (1+y) \frac{\partial P}{\partial y}$$

$$D = \frac{g \cdot F}{P \cdot y} \left[\frac{1+y}{y} - \frac{1}{y(1+y)^{N-1}} - \frac{N \cdot y}{(1+y)^N} \right] + \frac{F}{(1+y)^N} \cdot \frac{N}{P}$$

Расчет дюрации

Пусть имеется две облигации. Бескупонная номиналом \$1000 и сроком до погашения 3 года. Купонная облигация номиналом \$1000 и сроком погашения 4 года, купоном 10%. Доходность к погашению составляет 10%. Найти дюрацию облигаций.

Год t	ежегодная выплата C	приведенная стоимость выплат	доля в общей сумме w_t	доля в дюрации
формулы	$C = 0,1 \cdot 1000$	$\frac{C_t}{(1+y)^t}$	$w_t = \frac{C_t}{(1+y)^t P}$	$w_t \cdot t$
1	100	89,29	0,095	0,095
2	100	79,72	0,085	0,170
3	100	71,18	0,076	0,227
4	1100	699,07	0,744	2,977
Приведенная стоимость P		939,25	1	3,47

Расчет дюрации.

Дюрацию можно посчитать для любого (положительного) потока платежей при известной норме дисконтирования (процентной ставки).

$$D = \sum_{t=1}^T tw_i = \sum_{t=1}^T t \frac{C_i}{P(1+r)^i}$$

Для расчета дюрации в Excel существует финансовая функция ДЛИТ.

The image shows the 'Аргументы функции' (Function Arguments) dialog box for the 'ДЛИТ' (DURATION) function in Excel. The dialog has a blue title bar and a list of arguments on the left. The arguments are: 'Дата_согл' (Settlement Date) with value '2.02.1994', 'Дата_вступл_в_силу' (Maturity Date) with value '2.02.2000', 'Купон' (Coupon) with value 'K3', 'Доход' (Yield) with value 'L3', and 'Частота' (Frequency) with value 'M4'. To the right of each argument is a small icon and the resulting value: '2.02.1994', '2.02.2000', '0,07', '0,07', and '1' respectively. Below the arguments, the result of the function is displayed as '= 5,100197436'. A description of the function is provided: 'Возвращает ежегодную продолжительность действия ценных бумаг с периодическими выплатами по процентам.' (Returns the annual duration of action of securities with periodic interest payments). A note explains the 'Дата_согл' argument: 'Дата_согл - это дата соглашения для ценных бумаг, выраженная как дата в числовом формате.' (Дата_согл - this is the agreement date for securities, expressed as a date in numerical format). At the bottom, there is a link to the 'Справка по этой функции' (Help for this function) and the calculated value 'Значение: 5,100197436'. The 'OK' and 'Отмена' (Cancel) buttons are at the bottom right.

Аргументы функции	ДЛИТ
Дата_согл	"2.02.1994" = "2.02.1994"
Дата_вступл_в_силу	"2.02.2000" = "2.02.2000"
Купон	K3 = 0,07
Доход	L3 = 0,07
Частота	M4 = 1

= 5,100197436

Возвращает ежегодную продолжительность действия ценных бумаг с периодическими выплатами по процентам.

Дата_согл - это дата соглашения для ценных бумаг, выраженная как дата в числовом формате.

[Справка по этой функции](#) Значение: 5,100197436

Расчет дюрации.

Дюрацию можно рассчитать с помощью приближенной формулы,
Формула расчета дюрации с целым числом купонов N до погашения имеет

$$D_M = \frac{1}{P} \left\{ \frac{C}{Y^2} \left[\frac{1}{(1+Y/2)^{N-1}} \right] + \frac{N(F - C/Y)}{2(1+Y/2)^{N+1}} \right\}$$

Если облигацию приобрели между купонными выплатами (два купонных платежа), то надо учесть время, прошедшее после последнего платежа и продолжительность рассчитывается по формуле

$$D = \sum_{t=1-f}^{N-f} \frac{C}{(1+y)^t P} t + \frac{FV}{P(1+y)^N} - f$$

где f — часть времени, прошедшая после последнего купонного платежа, t — количество полугодических периодов оставшихся до срока погашения облигации

Модифицированная дюрация

Для того, чтобы в полной мере дюрация могла бы быть инструментом для измерения облигационного риска она должна учитывать сложный процент, т.е. должна учитывать дискретное компаундирование.

Модифицированная дюрация равна

$$MD = \frac{D}{(1 + YTM / m)}$$

где m - частота начисления процента в год (компаундирования),

YTM - доходность до погашения (внутренняя ставка доходности облигации – IRR) облигации, выраженная в виде десятичной дроби.

Процентное изменение цены облигации (4.21) выраженное через модифицированную дюрацию MD имеет вид

$$\frac{\Delta P}{P} = -D \frac{\Delta r}{1+r} = \left| r = \frac{YTM}{m} \right| = -\frac{D}{1+YTM / m} \Delta r = -MD \Delta r$$

Эффективная дюрация.

Если денежный поток очень сложен и рассчитать дюрацию бывает сложно, то используют эффективную дюрацию

$$\frac{\Delta P}{P} = -D \frac{\Delta y}{1+y} \quad \frac{\Delta P}{P \Delta y} (1+y_0) = -D$$

$$2\Delta P = (P_0 + \Delta P) - (P_0 - \Delta P) = P_- - P_+$$

P_- цена при падении доходности P_+ цена при росте доходности

$$2\Delta y = (y + \Delta y) - (y - \Delta y) \quad \frac{\Delta P}{P_0 \Delta y} = \frac{P_- - P_+}{P_0 (y_+ - y_-)} = - \frac{D}{1+y_0}$$

$$\frac{P_- - P_+}{P_0 (y_+ - y_-)} \quad \text{эффективная дюрация}$$

Модифицированная дюрация

Ограничения применения концепции модифицированной дюрации.

Процентные ставки изменяются мгновенно. Реально изменение процентных ставок происходит медленно.

При малых уровнях изменения рыночной доходности не более 10 базисных пунктов

Параллельное изменение уровня рыночной доходности. Поскольку облигации имеют распределенный во времени поток платежей и цена облигации – это дисконтированная сумма потока купонных платежей, то процентные ставки для разных временных периодов должны измениться на одну и ту же величину. Это означает, что для всех облигаций с разными сроками до погашения их доходности изменились бы на одну и ту же величину. Обычно такое изменение более сильно для краткосрочных облигаций, чем для долгосрочных.

Несмотря на ограничения применения концепции модифицированной дюрации она является одним из основных индикаторов рыночного риска облигаций.

Факторы, влияющие на дюрацию купонной облигации

Можно выделить 7 основных факторов, влияющих на величину дюрации:

- срок до погашения;
- купонная ставка;
- накопленные проценты;
- доходность до погашения;
- отчисления в фонд по гашения;
- право досрочного погашения;
- время, оставшееся до погашения.

Фактор	Изменения <u>дюрации</u> для	
	<u>Низкой дюрации</u>	<u>Высокой дюрации</u>
Срок погашения	уменьшает	увеличивает
Купонная ставка	увеличивает	уменьшает
Накопленные проценты	увеличивает	уменьшает
Уровень рыночной доходности	увеличивает	уменьшается
Отчисления в фонд погашения	Сильно влияют	Слабо влияют
Право досрочного погашения	Сильно влияют	Слабо влияют

Дюрация Фишера-Вейля.

Дюрация Макколи измеряет изменение цены облигации по отношению к изменению внутренней доходности облигации. При этом процентная ставка за все периоды является постоянной. Доходность к погашению может быть получена, если известна рыночная стоимость бумаги, а рыночная стоимость определяется по кривой доходности. Более полезной является оценка дюрации, которая учитывает сдвиг кривой доходности через форвардные процентные ставки

$${}_0i_1 = {}_0r_1 + \delta$$

$$P = \frac{C_1}{(1+{}_0r_1)} + \frac{C_2}{(1+{}_0r_2)^2} + \dots + \frac{C_3}{(1+{}_qr_T)^T}$$

выражение для дюрации Фишера-Вейля

$$D = \sum_{t=1}^T t \omega_t = \sum_{t=1}^T t \frac{C_t}{P(1+{}_0r_t(0))^t}$$

Выпуклость

Рис. 3.10.. Графическая интерпретация дюрации и выпуклости.



Заштрихованная область на рис.3.10 — область положительной выпуклости. Коэффициент выпуклости обычно выражается в процентах от цены облигации.

Выпуклость

Коэффициент выпуклости (Convexity) равен

$$C_X = \frac{1}{P} \cdot \frac{\partial^2 P}{\partial y^2}$$

Коэффициент выпуклости равен

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} P' = \frac{P}{(1+y)^2} \left[\sum_{t=1}^N \frac{C_t \cdot t(1+t)}{P(1+y)^t} \right] = \frac{P}{(1+y)^2} \left[\sum_{t=1}^N \frac{C_t t}{P(1+y)^t} + \sum_{t=1}^N \frac{C_t \cdot t^2}{P(1+y)^t} \right] \\ &= \frac{P}{(1+y)^2} \left[D + \sum_{t=1}^N \omega_t \cdot t^2 \right] \end{aligned}$$

Выпуклость, как и дюрация, применяется для оценки ценового риска облигации.

Формула Тейлора

$$\Delta Y = \frac{dY}{dx} \Delta x + \frac{1}{2} \frac{d^2 Y}{dx^2} \Delta x^2 + \varepsilon$$

$$\Delta P = \frac{dP}{dr} \Delta r + \frac{1}{2} \frac{d^2 P}{dr^2} \Delta r^2 + \varepsilon$$

$$\frac{dP}{P} = \frac{dP}{dr} \frac{1}{P} \Delta r + \frac{1}{2} \frac{d^2 P}{dr^2} \frac{1}{P} \Delta r^2 + \varepsilon$$

$$\frac{dP}{dr} \frac{1}{P} = -MD$$

$$\frac{1}{2} \frac{d^2 P}{dr^2} \frac{1}{P} = C_x$$

Риск изменения процентной ставки

Инвестиции даже в государственные облигации подвержены риску изменения процентной ставки.

Используя выражения для модифицированной дюрации и выпуклости, найдем оценку для относительного изменения цены облигации

$$\frac{\Delta P}{P} = -MD \cdot \Delta y + \frac{1}{2} C_x (\Delta y)^2 + \text{остаток}$$

Показатель дюрации и выпуклости составляют мультипликатор ценовой неустойчивости, при помощи которого можно более точно предсказать цену облигации при малых изменениях доходности.

Эффекты выпуклости на растущих и падающих рынках не одинаковы. Падение уровня рыночной доходности сильнее воздействует на величину выпуклости, чем равное по величине увеличение процентных ставок.

Облигации с большей продолжительностью имеют более высокий показатель выпуклости, чем краткосрочные облигации.

Коэффициент выпуклости является стандартизированным показателем, позволяющем сравнить различные типы облигаций. Оценка изменения цены облигации на основе выпуклости и дюрации дают более точные результаты по сравнению с такой же оценкой на основе только дюрации.

Дюрация портфеля ценных бумаг

Дюрация портфеля ценных бумаг – это средневзвешенный срок поступлений в поток наличности. Весовыми коэффициентами являются текущие стоимости этих поступлений. Дюрация портфеля равна

$$D = \sum_{t=1}^n \frac{C_t}{(1+y)^t P} t = \sum_{i=1}^m \omega_i D_i \quad \omega_i = \frac{C_i}{\sum PV_i}$$

где C_t - номинальная стоимость платежа в поток наличности в год t ,

P – текущая стоимость всех будущих платежей, текущая рыночная стоимость портфеля,

t - количество лет, оставшееся до получения следующего платежа, n

n – количество лет до конечного срока существования портфеляю.

где PV_i - сумма затраченная на покупку облигаций

Дюрация портфеля ценных бумаг

Решение. Поток платежей в портфель от каждого актива и доходность каждого актива в портфеле приведены ниже в таблице

Облигация	затраты на покупку	кол-во в портфеле	доля в портф	Время (срок платежа)						
				1	2	3	4	5	IRR	Доля IRR в дох портф.
A1	2000	2,35	0,29	- 850				1035	5,05%	0,014418
A2	3000	10,34	0,43	- 290	10	10	330		6,68%	0,028612
A3	2000	2,02	0,29	- 990		90		1100	4,91%	0,014017

Результирующий поток платежей в портфель равен сумме платежей от каждой облигации в соответствующий временной период и имеет вид

Время(срок)	0	1	2	3	4	IRR
Платежи	-7000	103,4482759	285,2664577	3413,793	4657,516	5,59%

Дюрация портфеля ценных бумаг

Пример . Пусть сформирован портфель из трех облигаций, цены которых в момент приобретения равны = 2000; = 3000; = 2000. Платежи по облигациям

Равны

Облигация	0	0,5	1	1,5	2
A1	-850				1035
A2	-290	10	10	330	
A3	-990		90		1100

Рассчитать внутреннюю доходность портфеля

Найти потоки платежей в портфель.

Рассчитать дюрацию портфеля при $r = 6\%$.

Дюрация портфеля

Дюрацию портфеля можно рассчитать в Excel

Время(срок)	1,00	2,00	3,00	4,00
Платежи	103,45	285,27	3 413,79	4 657,52
Ci	97,59	253,89	2 866,29	3 689,19
wi	0,01	0,04	0,41	0,53
PV	6 906,95			
D	3,47			

Дюрация портфеля ценных бумаг

Отличие расчета дюрации портфеля облигаций от расчета дюрации облигации.

- Поступления платежей идут пакетом и в отличие от облигации неравномерно распределены во времени.
- Внутренняя ставка доходности портфеля является ставкой доходности портфеля IRR и не является средней доходностью портфеля. Найти IRR можно также, как и для любого потока платежей.
- Процентные ставки для всех сроков, облигаций входящих в портфель меняются на одну и ту же величину.

Выводы. Дюрацию портфеля облигаций можно рассматривать как меру процентного риска,.

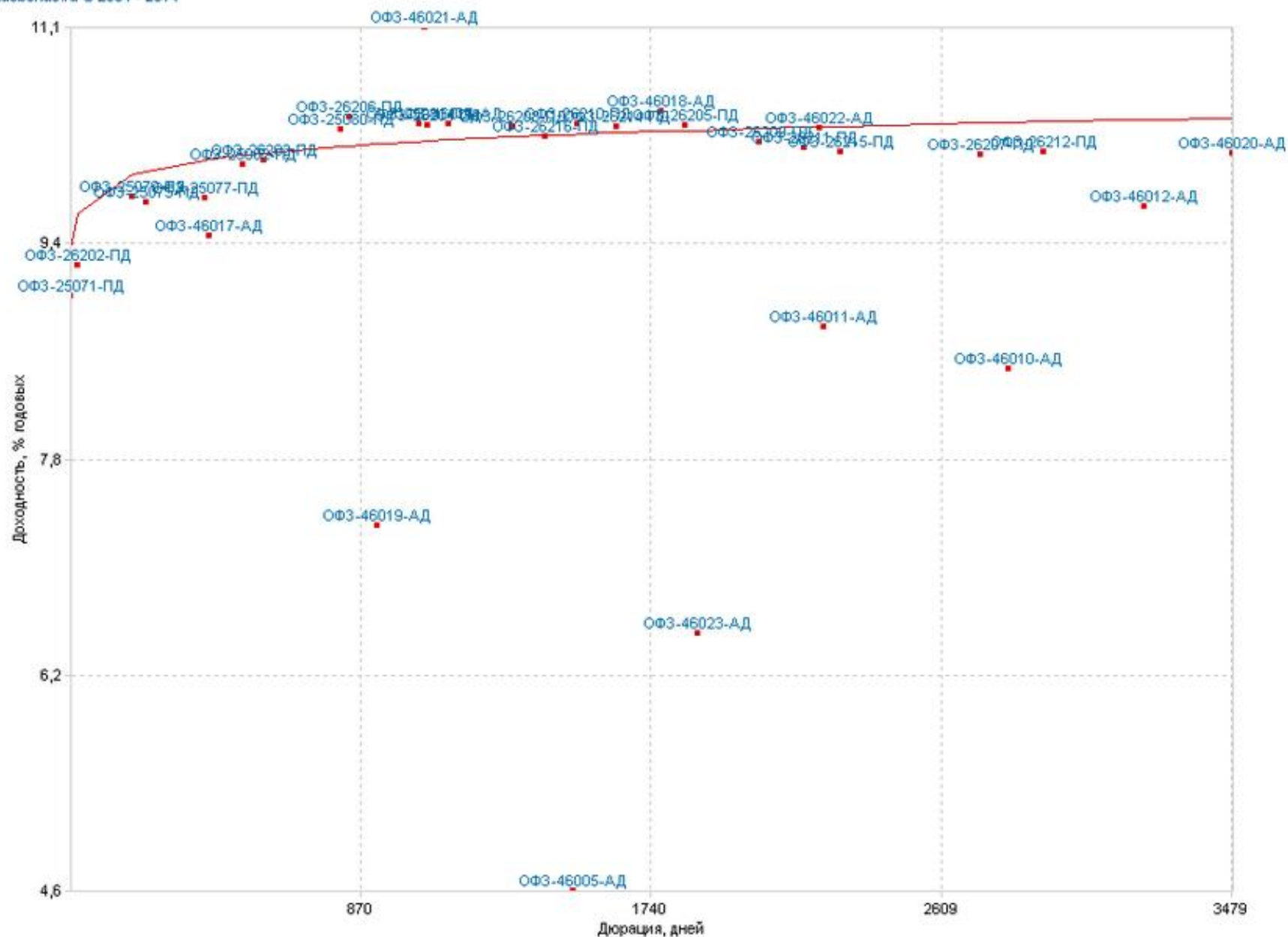
Кривая доходности.

Соотношение между процентными ставками спот и временем до погашения называется казначейской кривой доходности или просто кривой доходности.

Казначейские облигации не подвержены риску неуплаты и поэтому имеют наименьшую доходность среди всех бумаг с фиксированным доходом. Существуют также кривые доходности для других типов облигаций. Вид кривой доходности очень важен для участников рынка и поэтому ежедневно публикуется в финансовой прессе.

https://school.stockcharts.com/doku.php?id=chart_analysis:yield_curve

Там же можно найти правила построения кривой доходности. Для построения кривой доходности применяются различные математические методы экстраполяции и сглаживания.



Теории временной структуры процентной ставки.

Кривая доходности позволяет инвесторам прогнозировать будущие процентные ставки. Трейдеры, используя кривую доходности, покупают облигации с одним сроком погашения и продают с другим сроком

На самом деле, уровень доходности облигаций зависит от состояния экономики. Растущая экономика создает спрос на деньги, что приводит к повышению доходности облигаций, а следовательно понижению цен на облигации. Экономика, находящаяся на спаде ведет к снижению доходности и росту цен на облигации

Теория несмещенных ожиданий

Теория предпочтения ликвидности

Теория сегментирования рынка.

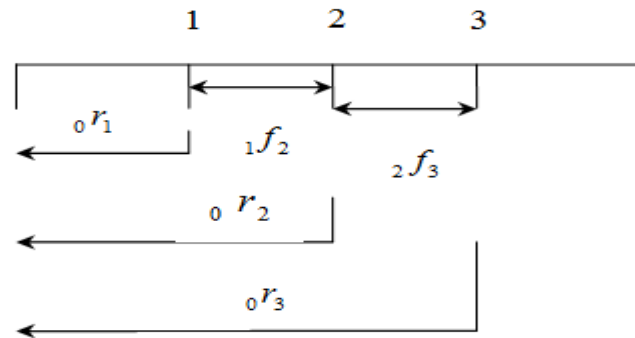
Теории временной структуры процентной ставки

Форвардные и спот ставки

Теория несмещенных ожиданий.

Наведенные форвардные ставки являются несмещенными оценками будущих ставок спот. Это означает, что реализовавшаяся разность между ставкой спот и форвардной процентной ставкой равна нулю.

Рис.3.12. Взаимосвязь спот и форвардных процентных ставок.



$$\sqrt[n]{(1+{}_0f_1)(1+{}_1f_2)\dots\dots(1+{}_{n-1}f_n)} = (1+{}_0r_n)$$

По теории несмещенных ожиданий получается, что в любой момент времени долговые контракты с разными сроками погашения являются взаимозаменяемыми.

Инвесторы безразлично относятся к риску. Используя теорию несмещенных ожиданий можно рассчитать форвардные ставки.

Теория предпочтения ликвидности.

Эта теория использует информацию о премии за риск. Бумаги с различными срокам до погашения не являются взаимозаменяемыми. Инвесторы предпочитают краткосрочные вложения, требуя "премию ликвидности" за риск долгосрочных вложений. Форвардные ставки теперь являются смещенными оценками будущих спот ставок. Премия за ликвидность возрастает с ростом срока инвестирования

$$\sqrt{(1+{}_0r_1)(1+{}_1f_2+{}_1LP_2)} = (1+{}_0r_2)$$

Однопериодная форвардная ставка равна несмещенной оценке однопериодной ставке спот плюс премию за риск

$${}_1f_2 = {}_1r_2 + {}_1LP_2$$

Теория сегментирования рынка.

Наблюдаемые формы кривой доходности связаны с различными потребностями участников рынка.

Пенсионные фонды и страховые компании имеют долгосрочные обязательства. Поэтому для хеджирования своих позиций приобретают бумаги с фиксированным доходом с теми же сроками (выравнивание дюраций.)

Большинство компаний имеет депозиты сроком в пять лет, что приводит к активности на этом среднесрочном участке рынка. Согласно этой теории ставки спот определяются спросом и предложением данной группы бумаг.

Стратегии хеджирования риска изменения процентной ставки.

Стоимость портфеля облигаций подвержена риску изменения процентной ставки. Проблема риска изменения процентной ставки существует, например, для фирм производящие долгосрочную продукцию (автомобили, мебель, строительство и т.п.). Эти фирмы имеют портфель задолженности потребителей, рыночная стоимость которого колеблется из-за колебаний процентной ставки. Фирмы берут займы деньги под залог облигаций, по которым возвращают долг периодическими платежами. Это осуществляется с помощью фонда погашения задолженности долгосрочного займа. Если процентная ставка растет, то фирма может сократить отток денег за счет выкупа своих облигаций на свободном рынке.

Если процентная ставка падает, облигации погашаются

Стоимость облигации относительно кривой доходности

- Найти цену двухлетней бескупонной облигации номиналом в 110. Процентные ставки спот для 1-го года 5%, форвард для 1-2 равен 5,5%. Найти YTM облигации.
- Решение.

$$PV = \frac{FV}{(1+r_2)^2} = \frac{FV}{(1+r_1)(1+f_2)} = \frac{110}{1,05 * 1,055} = 99,30$$

$$PV = \frac{FV}{(1+y)^2};$$

Доходность до погашения YTM находится из решения уравнения

$$YTM = \sqrt{\frac{110}{99,30}} - 1 = 0,0525$$

Стоимость облигации относительно кривой ДОХОДНОСТИ

Найти цену двухлетней купонной облигации номиналом в 110 и купоном в 4,5%, выплачиваемых раз в год (два раза в год). Процентные ставки спот для 1-го года 5%, форвард для 1-2 равен 5,5%. Найти YTM облигации.

Решение.

Согласно теории несмещенных ожиданий спот ставка ${}_0r_2$

$$(1+{}_0r_2)^2 = (1+{}_0r_2)(1+{}_0f_2) = 1,10775 \quad {}_0r_2 = 0,0525$$

Стоимость облигации с купоном, выплачиваемым раз в год равна

$$PV = \frac{C}{(1+{}_0r_2)} + \frac{FV + C}{(1+{}_0r_2)^2} = \frac{45}{1,0525} + \frac{45+110}{1,0525^2} = 108,47$$

Стоимость облигации с купоном, выплачиваемым два раза в год равна

$$PV = \frac{C/2}{(1+{}_0r_2/2)} + \frac{C/2}{(1+{}_0r_2/2)^2} + \frac{C/2}{(1+{}_0r_2/2)^3} + \frac{C/2}{(1+{}_0r_2/2)^4} + \frac{FV}{(1+{}_0r_2/2)^4} = 108,45$$

YTM можно найти используя функцию СТАВКА(4;110*0,045/2;-99;110)=5,08%

Стоимость облигации относительно кривой доходности

- Пусть известна трехлетняя временная структура ставок спот – кривая доходности, которая имеет вид.

СРОК ПОГАШЕНИЯ	1	2	3
1+спот ставка	1,04	1,069	1,0989

Стоимости каких облигаций можно найти?

Найти YTM этих облигаций.

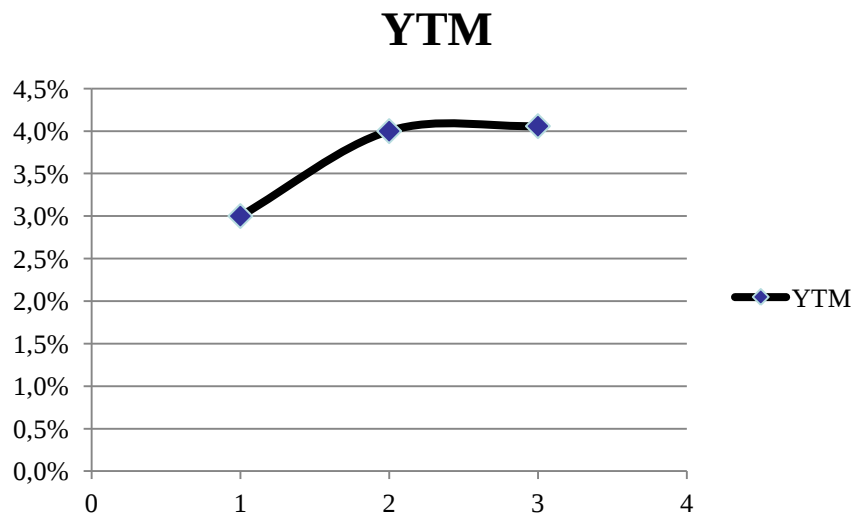
$$= \frac{1100}{1,0973^3}$$

Стоимость облигации относительно кривой доходности

Тип облигации	Цена = приведенная стоимость	Выплаты по периодам			YTM
		1	2	3	
Трехлетняя купонная облигация с 10% купоном и годовым начислением %	1013,25	100	100	1100	0,0947
		$= \frac{100}{1,04} = 96,15$	$= \frac{100}{1,0795^2} = 88,16$	$= \frac{1100}{1,0973^3} = 828,93$	
Двухлетняя купонная облигация с 5% купоном и годовым начислением процентов	966,90	50	1050		0,0673
		$= \frac{50}{1,04} = 48,06$	$= \frac{1050}{1,069^2} = 918,83$		
Однолетняя бескупонная	961,54	$= \frac{1000}{1,04} = 1000$			0,04
Двухлетняя бескупонная	875,07	0	1000		0,0696
Трехлетняя бескупонная	753,57	0	0	1000	0,0989

Построение кривой доходности

Срок до погашения	купон	Стоимость	номинал	YTM
1	0,0%	97,087	100	3,0%
2	6,0%	103,83	100	4,0%
3	9,0%	105,45	100	4,1%



$$PV = \sum_{i=1}^{N*m} \frac{gF}{m(1 + \frac{r}{m})^i} + \frac{F}{(1 + \frac{r}{m})^{m*N}}$$

Стратегии хеджирования риска изменения процентной ставки.

Стратегии управления портфелем подразделяются на пассивные и активные стратегии. Стратегии пассивного управления обычно бывают трех видов.

Сопоставление потоков наличности.

Иммунизация облигаций.

Индексация облигаций.

Стратегии активного управления портфелем предполагает изменение структуры портфеля.

Управление облигаций с контролированием рисков, которое предполагает нейтрализацию рыночных рисков облигационного портфеля.

Управление облигациями с изменениями рисков, которое предполагает преднамеренное изменение рисков, воздействующих на облигационный портфель

Иммунизация портфеля облигаций.

Создается портфель ценных бумаг, дюрация которого равна дюрации потока обязательств. Выпуклости потоков могут отличаться. Основная цель стратегии иммунизации – защита портфеля от негативного воздействия изменения процентных ставок.

Стратегия хеджирования портфеля облигаций от риска изменения процентной ставки основывается на том, что стоимость облигаций и стоимость реинвестированных купонов по разному зависит от процентной ставки. *Портфель облигаций, сформированный на горизонт инвестирования T , будет иммунизирован от риска изменения процентной ставки, если его дюрация равна сроку инвестирования T .*

Хеджирование так же связано с тем, что облигации с различными сроками погашения по разному реагируют на изменение процентной ставки

Иммунизация. Дюрация и выпуклость.

Для иммунизации долга приведенная стоимость портфеля облигаций должна быть равна приведенной стоимости долга на момент формирования портфеля облигаций.

$$FV_{порт} = (1+y)^T PV(y)$$

$$\frac{\partial FV_{порт}(t, y)}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial FV_{порт}}{\partial y} = T \frac{PV(y)}{(1+y)} (1+y)^T + (1+y)^T \frac{\partial PV(y)}{\partial y}$$

$$T \frac{PV(y)}{(1+y)} = - \frac{\partial PV(y)}{\partial y}$$

$$T = - \frac{\partial PV(y) / \partial y}{PV(y)} (1+y)$$

$$\frac{\partial P}{P} = -D \frac{\partial y}{(1+y)}$$

$$D = - \frac{\partial P / \partial y}{P} (1+y)$$

$$\mathbf{T = D}$$

Функция

$FV_{порт}$ выпуклая

Иммунизация портфеля облигаций.

Условие полной иммунизации

$$\left\{ \begin{array}{l} PV(\text{портфеля}) = PV(\text{долга}) \\ \sum_{i=1}^m \omega_i D_i = T \\ \sum \omega_i = 1 \\ \frac{\partial^2 P_{\text{портф}}(r)}{\partial^2 r} \geq \frac{\partial^2 P_{\text{долг}}(r)}{\partial^2 r} \\ \omega_i \geq 0; i = 1, 2, \dots, n \end{array} \right.$$

Теория иммунизации предполагает горизонтальную структуру процентных ставок или параллельный сдвиг временной структуры процентных ставок

Иммунизация портфеля облигаций.

Для иммунизации портфеля облигаций от риска изменения процентной ставки необходимо, чтобы текущие стоимости и дюрации портфеля и долга были равны.

$$P_d = P_p$$

$$D_d = D_p$$

Для полной иммунизации необходимо, чтобы выпуклость долга была меньше выпуклости портфеля

$$\frac{\partial^2 P_d}{\partial r^2} < \frac{\partial^2 P_p}{\partial^2 r}$$

Иммунизация портфеля облигаций.

Пусть процентные ставки в момент формирования портфеля равны 12% годовых. Имеются два вида облигаций. Облигация А номиналом в 1000 руб., купоном 10%, сроком до погашения 2 года, выплаты купонов осуществляются раз в год. Облигация Б номиналом 1000 руб, купон 10%, выплачивается два раза в год, срок до погашения 2 года. Инвестор должен через 3 года погасить долг в 1 млн.руб. Сколько облигаций А и Б необходимо купить, чтобы иммунизировать портфель при изменении процентных ставок на 1%.

Облигац ии	FV	N	m	g	r	PV	D (дюрация)
А	1000	2	1	0,1	0,12	966,20	1,91
Б	1000	4	2	0,1		937,90	3,37

$$\begin{cases} \omega_A D_A + \omega_B D_B = 3 \\ \omega_A + \omega_B = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1,91\omega_A + 3,37\omega_B = 3 \\ \omega_A + \omega_B = 1 \end{cases}$$

$$\omega_A = 0,253, \omega_B = 0,747$$

Иммунизация портфеля облигаций.

Приведенная сумма долга равна $PV = \frac{10^6}{1,12^3} = 711780,25$ руб.

Облигаций А надо купить на сумму $P_A = \omega_A \cdot 711780,25 = 180058,73$ руб., а облигаций типа Б надо купить на сумму $P_B = \omega_B \cdot 711780,25 = 531721,52$ руб.

Количество облигаций А равно $K_A = \frac{P_A}{PV_A} = \frac{180058,73}{966,20} \approx 186$ шт.

Количество облигаций Б равно $K_B \approx 567$ шт.

Проверка иммунизации

облигация/периоды	Денежный поток от одной облигации А	все облигации А 186 шт	доход от реинвестирования в облигации А	облигация Б денежный поток	все облигации Б шт 567 шт. денежный поток	Доход от реинвестирования облигаций Б и продажи Б
1	0	0		50	28346,32	37047,51
2	100	18 636	23086,47	50	28346,32	35116,13
3	0			50	28346,32	33285,43
4	1100	23086,47	228162,99	50	28346,32	31550,17
5				50	28346,32	29905,37
6	Доход от облигаций А		251249,46	50	28346,32	28 346,32
7				50	28346,32	561692,85
8				1050	595272,81	

Стоимость портфеля равна $P_{портф} = 251249,46 + 28\,346,32 + 561692,85 = 1008193,24$ руб.

Переструктурирование портфеля.

- Пусть инвестор решил переструктурировать портфель через год. Процентные ставки уменьшились с 12% до 11% годовых. Дюрация долга теперь равна два года.
- Стоимость облигаций и дюрация облигаций в портфеле изменились и равны соответственно
- Через год стоимость портфеля равна сумме приведенной стоимости облигаций и доходу от купонов за первый год. Стоимость облигаций в портфеле через год равна
- Доход от купонно с учетом реинвестирования на полгода купонов от облигации Б равен

Управление дюрацией портфеля облигаций

- Стратегия иммунизации является пассивной стратегией хеджирования от риска изменения процентной ставки. Активная стратегия заключается в управлении дюрацией портфеля в соответствии с прогнозом изменения рыночных процентных ставок. При снижении процентных ставок дюрация портфеля увеличивается, при росте процентных ставок дюрация уменьшается. Изменение дюрации портфеля можно осуществить путем обмена (свопа) облигаций на новые.
- Стратегия хеджирования портфеля облигации путем управления дюрацией состоит в том, что при уменьшении процентных ставок надо увеличивать дюрацию портфеля, а при росте процентных ставок дюрацию следует уменьшать

Управление дюрацией портфеля.

Упреждающий своп.

- Пусть имеется портфель, состоящий из облигаций 4 видов. Процентная ставка равна 8%.

Облигации	A	B	C	D
платежи	1000	1500	2500	4000
дюрация	1,5	2	3,5	5
Доля в портфеле	1/9	1/6	5/18	4/9

- Выполнить упреждающий своп, если а) прогнозируемые процентные ставки увеличатся на 1%; б) уменьшаться на 1 %. Транзакционные издержки отсутствуют.

Упреждающий своп.

$$D = \sum \omega_i D_i = 3,69 \text{ лет}$$

Стоимость портфеля 9000 руб. Изменение стоимости портфеля при изменении процентной ставки равно

$$\frac{\Delta P}{P} = -D \frac{\Delta r}{1+r} = -3,69 \frac{0,01}{1,08} = -0,0342$$

При росте процентных ставок на 1% стоимость портфеля уменьшится на

$\Delta P = 0,0342 \cdot 9000 = -307,8$ руб. и портфель будет стоить

$$P(0,09) = 9000 - 307,8 = 8692,13 \text{ руб.}$$

Для уменьшения величины падения стоимости портфеля дюрацию портфеля надо уменьшить. Для этого можно продать облигации с большой дюрацией, например, 5-летние на сумму 4000 руб. и купить облигации с маленькой дюрацией, например, с дюрацией в 1,5 года. При этом стоимость портфеля не изменится, а дюрация уменьшится, поскольку изменились доли облигаций в портфеле.

Нетрудно подсчитать, что дюрация такого портфеля будет равна $D = 2,139$. При увеличении процентных ставок на 1% стоимость портфеля уменьшится в этом случае на

$\Delta P = 0,0198 \cdot 9000 = 178,2$ руб. Стоимость портфеля при $r = 9\%$ равна

$$P(0,09) = 9000 - 178,2 = 8821,8 \text{ руб.}$$

Задача иммунизации портфеля облигации из более чем 2-х облигаций.

- Максимизировать целевую функцию

$$\max \sum_{i=1}^n C_{xi} w_i$$

- При условиях
$$\sum_{i=1}^n D_i w_i = T$$

$$\sum_{i=1}^n w_i = 1$$

- Задача линейного программирования.
- Решение «портфель-штанга»

Коэффициент хеджирования.

- Номинальное количество ценных бумаг одного вида, необходимое для хеджирования единичной позиции по другим ценным бумагам, называется коэффициентом хеджирования
- Для двух облигаций изменение стоимости равно

$$\Delta P_{1,2} \quad \Delta P_p = Q_1 \cdot \Delta P_1 + Q_2 \cdot \Delta P_2$$

где Δ - изменение цены, Q – объем выпуска.

- При малых изменениях доходности изменение цены можно аппроксимировать

$$\frac{\Delta P}{P} = -MD \cdot \Delta y + \frac{1}{2} C_x (\Delta y)^2 + \text{остаток}$$

Предполагая, что при параллельном сдвиге кривой доходности изменения доходности для всех инструментов одинаковы

$$\Delta P_p = -\Delta y \cdot (Q_1 \cdot MD_1 P_1 + Q_2 \cdot MD_2 P_2) \quad \Delta P_p = 0 \quad Q_2 = -\frac{MD_1 P_1}{MD_2 P_2} Q_1$$

Знак минус означает, что если исходная позиция длинная, то позиция хеджирования должна быть короткой. Коэффициент хеджирования – это отношение количества бумаг типа 2, необходимого для хеджирования к количеству бумаг типа 1

$$H = -\frac{Q_2}{Q_1} = \frac{MD_1}{MD_2} \frac{P_1}{P_2}$$

Коэффициент хеджирования

Предполагается, что кривая доходности будет круче, следовательно, доходности облигаций с большим сроком до погашения будут расти по сравнению с доходностями облигаций с меньшим сроком. Трейдер собирается продать на 1 млн.руб. 8% 30 летних облигаций и купить 8% 2 летних облигации для хеджирования. Сколько 2 летних облигаций надо купить. При этом предполагается, что каждый выпуск продается с доходностью 12%.

Характеристики облигаций.

n	g	r	PV	MD	H
30	0,08	0,12	67,68	8,362646	3,535074
2	0,08	0,12	93,23	1,717315	

Для хеджирования короткой позиции в 1 млн.руб. по 30 летним облигациям надо купить 2-х летних на 3,53 млн. руб.

Ключевые слова.

Стоимость бескупонной облигации, стоимость купонной облигации. Зависимость стоимости облигации от процентной ставки, величины купонов, частоты выплаты купонов, срока до погашения. Доходность до погашения YTM. Доходность облигаций с правом досрочного погашения. Дюрация. Модифицированная дюрация. Выпуклость. Кривая доходности. Временная структура процентных ставок. Дюрация портфеля облигаций. Иммунизация портфеля облигаций.