Формула полной вероятности.

Пусть имеется группа событий H_1, H_2,..., H_n, обладающая следующими свойствами:

1) все события попарно несовместны: $H_i \cap H_j = \varnothing$; $i, j=1,2,...,n$; $i \neq j$;

2) их объединение образует пространство элементарных исходов Ω:

$$\Omega = H_1 \cup H_2 \cup \ldots \cup H_n.$$

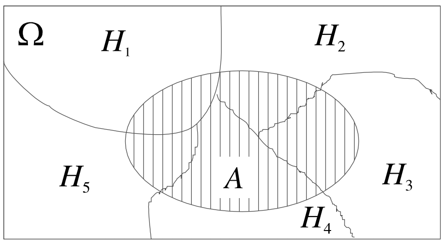

Рис.8

В этом случае будем говорить, что $H_1, H_2,...,H_n$ образуют **полную группу событий**. Такие события иногда называют **гипотезами**.

Пусть A – некоторое событие: $A \subset \Omega$ (диаграмма Венна представлена на рисунке 8).

Тогда имеет место **формула полной вероятности:**

$$P(A) = P(A/H_1)P(H_1) + P(A/H_2)P(H_2) + ...+ P(A/H_n)P(H_n) == \sum_{i=1}^{n} P(A/H_i)P(H_i)$$

Доказательство. Очевидно: $A = (A \cap H_1) \cup (A \cap H_2) \cup \ldots \cup (A \cap H_n)$, причем все события $A \cap H_i$ ($i = 1,2,...,n$) попарно несовместны. Отсюда по теореме сложения вероятностей получаем

$$P(A) = P(A \cap H_1) + P(A \cap H_2) +...+ P(A \cap H_n$$

Если учесть, что по теореме умножения $P(A \cap H_i) = P(A/H_i)P(H_i)$ ($i = 1,2,...,n$), то из последней формулы легко получить приведенную выше формулу полной вероятности.

Пример. В магазине продаются электролампы производства трех заводов, причем доля первого завода - 30%, второго - 50%, третьего - 20%. Брак в их продукции составляет соответственно 5%, 3% и 2%. Какова вероятность того, что случайно выбранная в магазине лампа оказалась бракованной.

Пусть событие H_1 состоит в том, что выбранная лампа произведена на первом заводе, H_2 на втором, H_3 - на третьем заводе. Очевидно:

$$P(H_1) = 3/10, \quad P(H_2) = 5/10, \quad P(H_3) = 2/10.$$

Пусть событие A состоит в том, что выбранная лампа оказалась бракованной; A/H_i означает событие, состоящее в том, что выбрана бракованная лампа из ламп, произведенных на i-ом заводе. Из условия задачи следует:

$$P\,(A/H_1) = 5/10;\ P(A/H_2) = 3/10;\ P(A/H_3) = 2/10$$

По формуле полной вероятности получаем

$$P(A) = \frac{3}{10}\cdot\frac{5}{100} + \frac{5}{10}\cdot\frac{3}{100} + \frac{2}{10}\cdot\frac{2}{100} = \frac{17}{500}$$

Формула Байеса

Пусть $H_1, H_2, \ldots, H_n$ - полная группа событий и $A \subset \Omega$ – некоторое событие. Тогда по формуле для условной вероятности

$$P(H_k / A) = \frac{P(H_k \cap A)}{P(A)} \qquad (*)$$

Здесь $P(H_k\ /A)$ – условная вероятность события (гипотезы) H_k или вероятность того, что H_k реализуется при условии, что событие A произошло.

По теореме умножения вероятностей числитель формулы (*) можно представить в виде

$$P(H_k \cap A) = P(A \cap H_k) = P(A\ /H_k)\ P(H_k)$$

Для представления знаменателя формулы (*) можно использовать формулу полной вероятности

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A/H_i)P(H_i)$$

Теперь из (*) можно получить формулу, называемую **формулой Байеса**:

$$P(H_k / A) = \frac{P(A/H_k)P(H_k)}{\sum P(A/H_i)}$$

По формуле Байеса исчисляется вероятность реализации гипотезы H_k при условии, что событие A произошло. Формулу Байеса еще называют **формулой вероятности гипотез.** Вероятность $P(H_k)$ называют априорной вероятностью гипотезы H_k, а вероятность $P(H_k/A)$ – апостериорной вероятностью.

Пример. Рассмотрим приведенную выше задачу об электролампах, только изменим вопрос задачи. Пусть покупатель купил электролампу в этом магазине, и она оказалась бракованной. Найти вероятность того, что эта лампа изготовлена на втором заводе. Величина $P(H_2) = 0{,}5$ в данном случае это априорная вероятность события, состоящего в том, что купленная лампа изготовлена на втором заводе. Получив информацию о том, что купленная лампа бракованная, мы можем поправить нашу оценку возможности изготовления этой лампы на втором заводе, вычислив апостериорную вероятность этого события.

Выпишем формулу Байеса для этого случая

$$P(H_2 / A) = P(A / H_2) P(H_2) / P(A)$$

Из этой формулы получаем: $P(H_2 / A) = 15/34$. Как видно, полученная информация привела к тому, что вероятность интересующего нас события оказывается ниже априорной вероятности.

Задачи с решениями.

1.В первой урне 7 белых и 3 черных шара, во второй – 8 белых и 2 черных. При перевозке из первой урны во вторую урну перекатились два шара. После того, как шары во второй урне перемешались, из неё выкатился шар. Найти вероятность того, что выкатившийся из второй урны шар белый.

Пусть событие H_1 состоит в том, что из первой урны во вторую перекатились два белых шара, событие H_2 состоит в том, что перекатились два чёрных шара, а событие H_3 состоит в том, что перекатились шары разного цвета. Можно вычислить вероятности $P(H_1) = C_7^2 / C_{10}^2 = 7/15$, $P(H_2) = C_3^2 / C_{10}^2 = 1/15$, $P(H_3) = 7 \cdot 3 / C_{10}^2 = 7/15$ (при решении задачи полезно проверить выполнение необходимого условия $\sum P(H_i) = 1$).

Если реализовалась гипотеза H_1, то во второй урне оказалось 10 белых и 2 черных шара. Обозначим через A событие, заключающееся в том, что из второй урны выкатился белый шар. Тогда $P(A/H_1) = 10 / C_{12}^2 = 5/33$. Если реализовалась гипотеза H_2, то во второй урне оказалось 8 белых и 4 чёрных шара, и $P(A/H_2) = 8 / C_{12}^2 = 4/33$. Легко показать, что $P(A/H_3) = 9 / C_{12}^2 = 3/22$. Теперь можно воспользоваться формулой полной вероятности:

$$P(A) = (5/33)\cdot(7/15) + (4/33)\ (1/15) + (3/22)\ (7/15) = 47/330$$

2. В условие задачи №1 внесем изменение. Пусть после того, как из первой урны во вторую перекатились два шара и шары во второй урне перемешались, из неё выкатился белый шар. Найти вероятность того, что из первой урны во вторую перекатились разноцветные шары.

Вычисления предыдущей задачи подставим в формулу Байеса

$$P(H_3/A) = P(A/H_3)P(H_3)/\ P(A) = (3/22)(7/15)/(\ 47/33) = 7/47$$

3. В ящике лежат 20 теннисных мячей, в том числе 15 новых и 5 играных. Для игры выбираются 2 мяча и после игры возвращаются обратно. Затем для второй игры также наудачу извлекаются ещё два мяча. Найти вероятность того, что вторая игра будет проводиться новыми мячами.

Обозначим через A событие, заключающееся в том, что вторая игра будет проводиться новыми мячами. Пусть гипотеза H_1 состоит в том, что для первой игры были выбраны два новых мяча, гипотеза H_2 состоит в том, что для первой игры были выбраны новый и играный мячи, гипотеза H_3 состоит в том, что для первой игры были выбраны два играных мяча. Определим вероятности гипотез:

$$P(H_1) = C_{15}^2 \big/ C_{20}^2 = 21/38;\ P(H_2) = 15 \cdot 5 \big/ C_{20}^2 = 15/38;\ P(H_3) = C_5^2 \big/ C_{20}^2 = 2/38.$$

Теперь вычислим условные вероятности события A.

$$P(A/H_1) = C_{13}^2 \big/ C_{20}^2 = 39/95;\ P(A/H_2) = C_{14}^2 \big/ C_{20}^2 = 91/190;\ P(A/H_3) = C_{15}^2 \big/ C_{20}^2 = 21/38.$$

Осталось подставить результаты вычислений в формулу полной вероятности

$$P(A) = (21/38)\cdot(39/95) + (15/38)\cdot(91/190) + (2/38)\cdot(21/38) \approx 0.445$$

4. Сообщение со спутника на землю передаётся в виде бинарного кода, то есть как упорядоченного набора нулей и единиц. Предположим, что послание на 70% состоит из нулей. Помехи приводят к тому, что только 80% нулей и единиц правильно распознаются приёмником. Если принят сигнал “1”, то какова вероятность того, что отправлен сигнал “0”?

Пусть событие B_0 состоит в том, что отправлен сигнал “0”, а событие B_1 – в том, что отправлен сигнал “1”. Пусть событие A_0 состоит в том, что принят сигнал “0”, с событие A_1 – в том, что принят сигнал “1”. Нас интересует $P(B_0/A_1)$. По условию

$$P(B_0) = 0{,}7\ P(B_1) = 0{,}3$$

$$P(A_0/\ B_0) = 0{,}8\ P(A_1/\ B_0) = 0{,}2$$

$$P(A_1/B_0) = 0{,}8\ P(A_0/\ B_1) = 0{,}2$$

По формуле Байеса получаем

$$P(B_0/A_1) = 0{,}2\cdot 0{,}7/(0{,}2\cdot 0{,}7+0{,}8\cdot 03) = 0{,}37.$$

5. Бригада, работающая в дневную смену, производит изделий в два раза больше, чем бригада, работающая в ночную смену. Отсюда следует, что если выбрать случайным образом изделие, произведённое в цеху, то с вероятностью $2/3 \approx 0{,}66$ оно произведено бригадой, работающей днём. Это априорная вероятность. Известно, что бригада, работающая днём, производит 3% некондиционных изделий, а бригада, работающая ночью, – 7% некондиционных изделий. Пусть случайным образом отобранное изделие оказалось

некондиционным. Тогда по формуле Байеса можно вычислить апостериорную вероятность того, что это изделие произведено дневной бригадой

$$P(H_1/A) = (3/100)(2/3)/((3/100)(2/3) + (7/100)(1/3)) \approx 0{,}632$$

Как видно, апостериорная вероятность интересующего нас события здесь несколько ниже априорной вероятности.

Задачи для самостоятельного решения.

1) Для проверки усвоения лекционного материала в студенческой группе был случайным образом выбран студент, и ему был предложен тест по теме лекции. В этой студенческой группе 6 отличников, 7 хороших студентов и три средних студента (по результатам прошедшей сессии). Было известно, что отличник справляется с тестом с вероятностью 0,85, хороший студент справляется с тестом с вероятностью 0,6, а средний студент справляется с тестом с вероятностью 0,3.

а) вычислить априорную вероятность того, что был протестирован хороший студент;

в) вычислить вероятность того, что студент не справился с тестом;

с) вычислить вероятность того, что был выбран хороший студент, если известно, что студент с тестом не справился.

2) В упаковке находилось 7 изделий первого сорта и 5 изделий второго сорта, внешне неразличимых. При транспортировке два изделия были похищены. После этого из упаковки было извлечено наудачу изделие и подвергнуто проверке на качество.

а) вычислить вероятность того, что были похищены изделия второго сорта;

в) вычислить вероятность того, что среди похищенных изделий одно было первого сорта, другое второго сорта;

с) вычислить вероятность того, подвергнутое проверке изделие было второго сорта;

d) вычислить вероятность того, что похищенные изделия были второсортными, если

Ответы. 1) а) 7/16 = 0,4375; в) 0,3625 с) 0,482759.