Глава 1. Начала линейной алгебры

§ 1. Системы линейных уравнений

Систему m линейных уравнений с n неизвестными будем записывать в следующем виде:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} . \tag{1}$$

Здесь $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – неизвестные величины, a_{ij} ($i = 1,2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, n$) – числа, называемые коэффициентами системы (первый индекс фиксирует номер уравнения, второй — номер неизвестной), $b_1, b_2, \ldots, b_m$ –числа, называемые свободными членами.

Решением системы будем называть упорядоченный набор чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$, обращающий каждое уравнение системы в верное равенство.

Решить систему — значит найти все ее решения или доказать, что ни одного решения нет.

Система, имеющая решение, называется **совместной**.

Если система имеет только одно решение, то она называется **определенной**. Система, имеющая более чем одно решение, называется **неопределенной** (**совместной** и **неопределенной**).

Если система не имеет решений, то она называется **несовместной**.

Система, у которой все свободные члены равны нулю ($b_1 = b_2 = \ldots = b_n = 0$), называется **однородной**. Однородная система всегда совместна, так как набор из n нулей удовлетворяет любому уравнению такой системы.

Если число уравнений системы совпадает с числом неизвестных ($m=n$), то система называется **квадратной**.

Две системы, множества решений которых совпадают, называются **эквивалентными** или **равносильными** (совпадение множеств решений означает, что каждое решение первой системы является решением второй системы, и каждое решение второй системы является решением первой).

Две несовместные системы считаются эквивалентными.

Преобразование, применение которого превращает систему в новую систему, эквивалентную исходной, называется **эквивалентным** или **равносильным преобразованием**. Примерами эквивалентных преобразований могут служить следующие преобразования: перестановка местами двух уравнений системы, перестановка местами двух неизвестных вместе с коэффициентами у всех уравнений, умножение обеих частей какого-либо уравнения системы на отличное от нуля число.

§ 2. Метод Гаусса решения систем линейных уравнений

Рассмотрим квадратную систему

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 11 \\ 4x_1 + 6x_2 - x_3 = -1 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 = 3 \\ 5x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 2 \end{cases}. \qquad (1)$$

У этой системы коэффициент a_{11} отличен от нуля. Если бы это условие не выполнялось, то чтобы его получить, нужно было бы переставить местами уравнения, поставив первым то уравнение, у которого коэффициент при x_1 не равен нулю.

Проведем следующие преобразования системы:

1) поскольку $a_{11} \neq 0$, первое уравнение оставим без изменений;

2) вместо второго уравнения запишем уравнение, получающееся, если из второго уравнения вычесть первое, умноженное на 4;

3) вместо третьего уравнения запишем разность третьего и первого, умноженного на 3;

4) вместо четвертого уравнения запишем разность четвертого и первого, умноженного на 5.

Полученная новая система эквивалентна исходной и имеет во всех уравнениях, кроме первого, нулевые коэффициенты при x_1 (это и являлось целью преобразований 1 – 4):

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 11 \\ 10x_2 - 13x_3 - 8x_4 = -45 \\ 5x_2 - 7x_3 - 7x_4 = -30 \\ 4x_2 - 13x_3 - 9x_4 = -53 \end{cases}. \qquad (2)$$

Можно доказать, что **замена любого уравнения системы новым, получающимся прибавлением к данному уравнению любого другого уравнения системы, умноженного на любое число, является эквивалентным преобразованием системы.**

Для приведенного преобразования и для всех дальнейших преобразований не следует целиком переписывать всю систему, как это только что сделано. Исходную систему можно представить в виде таблицы

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 & 11 \\ 4 & 6 & -1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 2 & -1 & 3 \\ 5 & -1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}. \qquad (3)$$

Прямоугольную таблицу, состоящую из p строк и q столбцов, будем называть **матрицей** размера $p \times q$:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1q} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2q} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{p1} & a_{p2} & a_{p3} & \dots & a_{pq} \end{pmatrix}.$$

Числа a_{ij} называются элементами матрицы. Первый индекс фиксирует номер строки, а второй – номер столбца, в которых стоит данный элемент. Если $p = q$, то есть число столбцов матрицы равно числу строк, то матрица называется **квадратной**. Элементы a_{ii} образуют **главную диагональ** матрицы.

Матрица (3) называется **расширенной матрицей** для исходной системы уравнений. Если из расширенной матрицы удалить столбец свободных членов, то получится **матрица коэффициентов системы**, которую иногда называют просто **матрицей системы**.

Очевидно, что матрица коэффициентов квадратной системы является квадратной матрицей.

Каждую систему m линейных уравнений с n неизвестными можно представить в виде расширенной матрицы, содержащей m строк и n+1 столбцов. Каждую матрицу можно считать расширенной матрицей или матрицей коэффициентов некоторой системы линейных уравнений. Системе (2) соответствует расширенная матрица

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 & 11 \\ 0 & 10 & -13 & -8 & -45 \\ 0 & 5 & -7 & -7 & -30 \\ 0 & 4 & -13 & -9 & -53 \end{pmatrix}.$$

Преобразуем эту матрицу следующим образом:

1) первые две строки оставим без изменения, поскольку элемент a_{22} не равен нулю;

2) вместо третьей строки запишем разность между второй строкой и удвоенной третьей;

3) четвертую строку заменим разностью между удвоенной второй строкой и умноженной на 5 четвертой.

В результате получится матрица, соответствующая системе, у которой неизвестная x_1 исключена из всех уравнений, кроме первого, а неизвестная x_2 — из всех уравнений кроме первого и второго:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 & 11 \\ 0 & 10 & -13 & -8 & -45 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 15 \\ 0 & 0 & 39 & 29 & 175 \end{pmatrix}.$$

Теперь исключим неизвестную x_3 из четвертого уравнения. Для этого последнюю матрицу преобразуем так:

1) первые три строки оставим без изменения, так как $a_{33} \neq 0$;

2) четвертую строку заменим разностью между третьей, умноженной на 39, и четвертой:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 & 11 \\ 0 & 10 & -13 & -8 & -45 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 205 & 410 \end{pmatrix}.$$

Полученная матрица соответствует системе

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 11 \\ 10x_2 - 13x_3 - 8x_4 = -45 \\ x_3 + 6x_4 = 15 \\ 205x_4 = 410 \end{cases}. \tag{4}$$

Из последнего уравнения этой системы получаем $x_4 = 2$. Подставив это значение в третье уравнение, получим $x_3 = 3$. Теперь из второго уравнения следует, что $x_2 = 1$, а из первого — $x_1 = -1$. Очевидно, что полученное решение единственно (так как единственным образом определяется значение x_4, затем x_3 и т. д.).

Назовем элементарными преобразованиями матрицы следующие преобразования:

1) перемена местами двух строк;

2) умножение строки на число, отличное от нуля;

3) замена строки матрицы суммой этой строки с любой другой строкой, умноженной на некоторое число.

Если матрица **A** является расширенной матрицей некоторой системы, и путем ряда элементарных преобразований матрица **A** переводится в матрицу **B**, являющуюся расширенной матрицей некоторой другой системы, то эти системы эквивалентны.

Назовем квадратную матрицу, у которой на главной диагонали стоят числа, отличные от нуля, а под главной диагональю – нули, **треугольной матрицей**. Матрица коэффициентов системы (4) – треугольная матрица.

Если с помощью элементарных преобразований матрицу коэффициентов квадратной системы можно привести к треугольной матрице, то система совместна и определенна.

Рассмотрим другой пример:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 + 4x_5 = -2 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 7 \\ x_1 - 2x_2 + 5x_3 - 5x_4 + 10x_5 = -10 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 - 3x_5 = 9 \end{cases}. \qquad (5)$$

Проведем следующие преобразования расширенной матрицы системы:

1) первую строку оставим без изменения;

2) вместо второй строки запишем разность между второй строкой и удвоенной первой;

3) вместо третьей строки запишем разность между третьей строкой и утроенной первой;

4) четвертую строку заменим разностью между четвертой и первой;

5) пятую строку заменим разностью пятой строки и удвоенной первой.

В результате преобразований получим матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & 4 & -2 \\ 0 & 5 & -5 & 0 & -5 & 5 \\ 0 & 5 & -7 & 4 & -11 & 13 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 6 & -8 \\ 0 & 5 & -7 & 4 & -11 & 13 \end{pmatrix}.$$

Оставив без изменения первые две строки этой матрицы, приведем ее элементарными преобразованиями к следующему виду:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & 4 & -2 \\ 0 & 5 & -5 & 0 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 6 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 6 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 6 & -8 \end{pmatrix}.$$

Если теперь, следуя методу Гаусса, который также называют и методом последовательного исключения неизвестных, с помощью третьей строки привести к нулю коэффициенты при x_3 в четвертой и пятой строках, то после деления всех элементов второй строки на 5 и деления всех элементов третьей строки на 2 получим матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Каждая из двух последних строк этой матрицы соответствует уравнению $0x_1+0x_2+0x_3+0x_4+0x_5 = 0$. Это уравнение удовлетворяется любым набором чисел $x_1, x_2, \ldots, x_5$, и его следует удалить из системы. Таким образом, система с только что полученной расширенной матрицей эквивалентна системе с расширенной матрицей вида

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 3 & -4 \end{pmatrix}. \qquad (6)$$

Последняя строка этой матрицы соответствует уравнению $x_3 - 2x_4 + 3x_5 = -4$. Если неизвестным x_4 и x_5 придать произвольные значения: $x_4 = r$; $x_5 = s$, то из последнего уравнения системы, соответствующей матрице (6), получим $x_3 = -4 + 2r - 3s$. Подставив выражения x_3, x_4, и x_5 во второе уравнение той же системы, получим $x_2 = -3 + 2r - 2s$. Теперь из первого уравнения можно получить $x_1 = 4 - r + s$. Окончательно решение системы представляется в виде

$$\begin{cases} x_1 = 4 - r + s \\ x_2 = -3 + 2r - 2s \\ x_3 = -4 + 2r - 3s \\ x_4 = r \\ x_5 = s \end{cases}.$$

Рассмотрим прямоугольную матрицу **A**, у которой число столбцов m больше, чем число строк n. Если матрицу **A** можно разделить вертикальной чертой на две матрицы: стоящую слева треугольную матрицу размера m и стоящую справа прямоугольную матрицу, то матрицу **А** назовем **трапециевидной** или **трапецеидальной**. Очевидно, что матрица (6) — трапециевидная матрица.

Если при применении эквивалентных преобразований к системе уравнений хотя бы одно уравнение приводится к виду

$$0x_1 + 0x_2 + \dots 0x_n = b_j \quad (b_j \neq 0),$$

то система несовместна или противоречива, так как ни один набор чисел $x_1, x_2, \dots, x_n$ не удовлетворяет этому уравнению.

Если при преобразовании расширенной матрицы системы матрица коэффициентов приводится к трапецеидальному виду и при этом система не получается противоречивой, то система совместна и является неопределенной, то есть имеет **бесконечно много решений**.

В последней системе можно получить все решения, придавая конкретные числовые значения параметрам r и s.

Те переменные, коэффициенты при которых стоят на главной диагонали трапецеидальной матрицы (это значит, что эти коэффициенты отличны от нуля), называются **базисными**. В рассмотренном выше примере это неизвестные x_1, x_2, x_3. Остальные неизвестные называются **свободными**. В рассмотренном выше примере это неизвестные x_4, и x_5. Свободным неизвестным можно придавать любые значения или выражать их через параметры, как это сделано в последнем примере.

Базисные неизвестные единственным образом выражаются через свободные неизвестные.

Если свободным неизвестным приданы конкретные числовые значения и через них выражены базисные неизвестные, то полученное решение называется **частным решением**.

Если свободные неизвестные выражены через параметры, то получается решение, которое называется **общим решением**.

Все бесконечное множество решений системы можно получить, придавая свободным неизвестным любые числовые значения и находя соответствующие значения базисных неизвестных.

Если всем свободным неизвестным приданы нулевые значения, то полученное решение называется **базисным**.

Одну и ту же систему иногда можно привести к разным наборам базисных неизвестных. Так, например, можно поменять местами 3-й и 4-й столбцы в матрице (6). Тогда базисными будут неизвестные x_1, x_2, x_4, а свободными – x_3 и x_5. Рекомендуем читателю самостоятельно привести последнюю систему к такому виду, чтобы свободными неизвестными были x_1 и x_2, а базисными – x_3, x_4, x_5.

Если получены два различных набора базисных неизвестных при различных способах нахождения решения одной и той же системы, то эти наборы обязательно содержат одно и то же число неизвестных, называемое **рангом системы**.

Рассмотрим еще одну систему, имеющую бесконечно много решений:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + 4x_4 + x_5 = 2 \\ 2x_1 + 3x_3 + 7x_4 - x_5 = 7 \\ 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 9x_4 + 5x_5 = 1 \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 + 14x_4 - 2x_5 = 8 \end{cases}.$$

Проведем преобразование расширенной матрицы системы по методу Гаусса:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & -3 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & -3 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & -5 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Как видно, мы не получили трапецеидальной матрицы, однако последнюю матрицу можно преобразовать, поменяв местами третий и четвертый столбцы:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Эта матрица уже является трапецеидальной. У соответствующей ей системы две свободных неизвестных – x_3, x_5 и три базисных – x_1, x_2, x_4. Решение исходной системы представляется в следующем виде:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{14}{3} - \frac{3}{2}r - \frac{11}{6}s \\ x_2 = \frac{4}{3} + \frac{1}{2}r + \frac{11}{6}s \\ x_3 = r \\ x_4 = -\frac{1}{3} + \frac{2}{3}s \\ x_5 = s \end{cases}.$$

Приведем пример не имеющей решения системы:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 7 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 5 \\ 4x_1 + 7x_2 - 3x_3 = 4 \end{cases}.$$

Преобразуем матрицу системы по методу Гаусса:

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 7 \\ 3 & 2 & -1 & 5 \\ 4 & 7 & -3 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 7 \\ 0 & 13 & -5 & -11 \\ 0 & 13 & -5 & -10 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 7 \\ 0 & 13 & -5 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Последняя строка последней матрицы соответствует не имеющему решения уравнению $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 1$. Следовательно, исходная система несовместна.

Сформулируем теперь кратко суть метода Гаусса. Полагая, что в системе коэффициент a_{11} отличен от нуля (если это не так, то следует на первое место поставить уравнение с отличным от нуля коэффициентом при x_1 и переобозначить коэффициенты), преобразуем систему следующим образом: первое уравнение оставляем без изменения, а из всех остальных уравнений исключаем неизвестную x_1 с помощью эквивалентных преобразований описанным выше способом.

В полученной системе

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad a_{22}^{*}x_2 + a_{23}^{*}x_3 + \ldots a_{2n}^{*}x_n = b_2^{*} \\ \qquad a_{32}^{*}x_2 + a_{33}^{*}x_3 + \ldots a_{3n}^{*}x_n = b_3^{*} \\ \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad a_{m2}^{*}x_2 + a_{m3}^{*}x_3 + \ldots a_{mn}^{*}x_n = b_m^{*} \end{cases},$$

считая, что $a_{22}^{*} \neq 0$ (что всегда можно получить, переставив уравнения или слагаемые внутри уравнений и переобозначив коэффициенты системы), оставляем без изменений первые два уравнения системы, а из остальных уравнений, используя второе уравнения, с помощью элементарных преобразований исключаем неизвестную x_2. Во вновь полученной системе

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad a_{22}^{*}x_2 + a_{23}^{*}x_3 + \ldots a_{2n}^{*}x_n = b_2^{*} \\ \qquad\qquad a_{33}^{**}x_3 + \ldots a_{3n}^{**}x_n = b_3^{**} \\ \qquad \ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad a_{m3}^{**}x_3 + \ldots a_{mn}^{**}x_n = b_m^{**} \end{cases}$$

при условии $a_{33}^{**} \neq 0$ оставляем без изменений первые три уравнения, а из всех остальных с помощью третьего уравнения элементарными преобразованиями исключаем неизвестную x_3.

Этот процесс продолжается до тех пор, пока не реализуется один из трех возможных случаев:

1) если в результате приходим к системе, одно из уравнений которой имеет нулевые коэффициенты при всех неизвестных и отличный от нуля свободный член, то исходная система несовместна;

2) если в результате преобразований получаем систему с матрицей коэффициентов треугольного вида, то система совместна и является определенной;

3) если получается система с трапецеидальной матрицей коэффициентов (и при этом не выполняется условие пункта 1), то система совместна и неопределенна.

§3. Элементы теории матриц

В предыдущем разделе было введено определение матрицы **A** размерности $p \times q$ как прямоугольной таблицы:

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1q} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2q} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{p1} & a_{p2} & a_{p3} & \dots & a_{pq} \end{pmatrix}.$$

Можно пользоваться сокращенной формой записи:

$$\mathbf{A} = (a_{ij});\ i = 1, 2, 3, \dots, p;\ j = 1, 2, 3, \dots, q.$$

Две матрицы одинаковой размерности $p \times q$ называются **равными**, если в них одинаковые места заняты равными числами (на пересечении i-й строки и j-го столбца в одной и в другой матрице стоит одно и то же число; i=1, 2, ..., p; j=1, 2, ..., q).

Пусть $\mathbf{A} = (a_{ij})$ – некоторая матрица и α – произвольное число, тогда $\alpha\mathbf{A} = (\alpha a_{ij})$, то есть **при умножении матрицы A на число α все числа, составляющие матрицу A, умножаются на число α.**

Пусть **A** и **B** – матрицы одинаковой размерности $\mathbf{A} = (a_{ij})$, $\mathbf{B} = (b_{ij})$, тогда их сумма $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ – матрица $\mathbf{C} = (c_{ij})$ той же размерности, определяемая из формулы $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, то есть **при сложении двух матриц попарно складываются одинаково расположенные в них числа**.

Матрицу A можно умножить на матрицу B, то есть найти матрицу C = AB, если число столбцов *n* матрицы A равно числу строк матрицы B, при этом матрица C будет иметь столько строк, сколько строк у матрицы *A* и столько столбцов, сколько столбцов у матрицы *B*. Каждый элемент матрицы **C** определяется формулой

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} .$$

Элемент c_{ij} матрицы-произведения C равен сумме произведений элементов *i*-строки первой матрицы-сомножителя на соответствующие элементы *j*-го столбца второй матрицы-сомножителя.

Из сказанного следует, что если можно найти произведение матриц **AB**, то произведение **BA**, вообще говоря, не определено.

Приведем примеры перемножения матриц:

$$1)\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & -3 \\ 4 & -2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -4 \\ 6 & 2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1\cdot 2 + 2\cdot 1 + 33\cdot 6 + 4\cdot(-3) & 1\cdot 5 + 2\cdot(-4) + 3\cdot 2 + 4\cdot(-1) \\ 2\cdot 3 + 1\cdot 1 + (-1)\cdot 6 + (-3)\cdot(-3) & 2\cdot 5 + 1\cdot(-4) + (-1)\cdot 2 + (-3)\cdot(-1) \\ 4\cdot 5 + (-2)\cdot(-4) + 3\cdot 2 + 1\cdot(-1) & 4\cdot 5 + (-2)\cdot(-4) + 3\cdot 2 + 1\cdot(-1) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 11 & -1 \\ 10 & 7 \\ 25 & 31 \end{pmatrix};$$

$$2)\ \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = (8, 4).$$

Если **AB** и **BA** одновременно определены, то, вообще говоря, эти произведения не равны. Это означает, что **умножение матриц не коммутативно**. Продемонстрируем это на примере.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 & 34 \\ 31 & 46 \end{pmatrix}.$$

Для алгебраических действий над матрицами справедливы следующие законы:

1) $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$;
2) $\alpha(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \alpha\mathbf{A} + \alpha\mathbf{B}$;
3) $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C})$;
4) $(\mathbf{AB})\boldsymbol{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$;
5) $\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}$.

Матрица, состоящая из одной строки, называется **вектором** (вектором-строкой). Матрица, состоящая из одного столбца, также называется вектором (вектором-столбцом).

Пусть имеется матрица $\mathbf{A} = (a_{ij})$ размерности $m \times n$, n-мерный вектор-столбец **X** и m-мерный вектор-столбец **B**:

$$\mathbf{X}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}; \quad \mathbf{B}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Тогда матричное равенство

$$\mathbf{AX} = \mathbf{B}, \tag{1}$$

если расписать его поэлементно, примет вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}.$$

Таким образом, формула (1) является записью системы m линейных уравнений с n неизвестными в матричной форме. Ниже будет показано, что, записывая систему в сжатом виде, кроме краткости написания мы получаем и другие очень важные преимущества.

Пусть имеются две квадратные матрицы одинаковой размерности:

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}; \mathbf{D}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 3 & -5 & 9 \\ -1 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

Требуется найти матрицу **X**, удовлетворяющую матричному уравнению

$$\mathbf{AX} = \mathbf{D}.$$

Из правила умножения матриц следует, что матрица **X** должна быть квадратной матрицей той же размерности, что и матрицы **A** и **D**:

$$\mathbf{X}=\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix}.$$

Из правила умножения матриц и из определения равенства матриц следует, что последнее матричное уравнение распадается на три системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} x_{11} + 2x_{21} + x_{31} = 2 \\ -x_{11} + 3x_{21} + 2x_{31} = 3 \\ 2x_{11} + 3x_{21} + x_{31} = -1 \end{cases};$$

$$\begin{cases} x_{12} + 2x_{22} + x_{32} = 1 \\ -x_{12} + 3x_{22} + 2x_{32} = -5; \\ 2x_{12} + 3x_{22} + x_{32} = 4 \end{cases} \qquad (2)$$

$$\begin{cases} x_{13} + 2x_{23} + x_{33} = 7 \\ -x_{13} + 3x_{23} + 2x_{33} = 9. \\ 2x_{13} + 3x_{23} + x_{33} = 6 \end{cases}$$

Все три системы (2) имеют одинаковые матрицы коэффициентов, что дает возможность решать их одновременно, введя матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 7 \\ -1 & 3 & 2 & 3 & -5 & 9 \\ 2 & 3 & 1 & -1 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

Здесь первые четыре столбца образуют расширенную матрицу первой системы, первые три столбца вместе с пятым столбцом образуют расширенную матрицу второй системы, а первые три столбца вместе с шестым – расширенную матрицу третьей системы.

Применим для решения **метод Жордана-Гаусса** который является модификацией метода Гаусса.

Первый шаг преобразования матрицы по методу Жордана-Гаусса совпадает с первым шагом преобразований по методу Гаусса. Оставляем без изменений первую строку матрицы, а во второй и третьей “организуем” нули в первом столбце:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 7 \\ 0 & 5 & 3 & 5 & -4 & 16 \\ 0 & 1 & 1 & 5 & -2 & 8 \end{pmatrix}.$$

Теперь, следуя методу Жордана-Гаусса, **оставляем без изменения лишь вторую строку** (так как $a_{22} \neq 0$) и получаем с помощью второй строки в **первой и третьей строках во втором столбце нули**. Для этого вместо первой строки пишем сумму первой строки, умноженной на 5, и второй строки, умноженной на –2. Вместо третьей строки пишем сумму третьей строки , умноженной на 5, и второй строки, умноженной на –1 После деления полученной третьей строки на 2 получаем матрицу

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & -1 & 0 & 13 & 3 \\ 0 & 5 & 3 & 5 & -4 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & 10 & -3 & 12 \end{pmatrix}.$$

Чтобы в первой и второй строках в третьем столбце получить нули, проведем следующие преобразования последней матрицы. Оставив третью строку без изменений, заменим вторую строку разностью второй строки и утроенной третьей, а первую – суммой первой и третьей строк. После деления первой и второй строк преобразованной матрицы на 5 получится матрица

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 10 & -3 & 2 \end{pmatrix}. \qquad (3)$$

При преобразовании системы по методу Жордана-Гаусса матрица коэффициентов приводится (если это возможно) к такому виду, что на главной диагонали стоят единицы, а над главной диагональю и под главной диагональю – нули.

Если взять первые четыре столбца матрицы (3), то получится матрица, в которую преобразовалась расширенная матрица первой из систем уравнений (2). Из нее следует: $x_{11}=2$; $x_{21}=-5$; $x_{31}=10$. Матрица, образованная первыми тремя столбцами вместе с пятым столбцом матрицы (3), дает решение второй системы уравнений (2): $x_{12}=2$; $x_{22}=1$; $x_{32}=-3$. И, наконец, матрица, образованная первыми тремя столбцами вместе шестым столбцом матрицы (3), дает решение третьей системы уравнений (2): $x_{13}=3$; $x_{23}=-4$; $x_{33}=12$.

Из сказанного можно сделать очень интересный и важный вывод: последние три столбца матрицы (3) образуют искомую матрицу X.

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ -5 & 1 & -4 \\ 10 & -3 & 12 \end{pmatrix}.$$

Введем ряд новых определений.

Нулевой матрицей называется матрица, у которой все элементы – нули. Очевидно равенство **A** + (–1)**A** = 0. Здесь в правой части через 0 обозначена нулевая матрица той же размерности, что и матрица **A**.

Квадратная матрица размера n называется **единичной**, если все её элементы, стоящие на главной диагонали, равны единице, а все остальные – нули. Единичную матрицу можно определить формулами:

$$a_{ij} = 1 \text{ при } i = j;$$
$$a_{ij} = 0 \text{ при } i \neq j.$$

Очевидно, что первые три столбца матрицы (3) образуют единичную матрицу.

Единичная матрица, как правило, обозначается буквой **E**:

$$\mathbf{E}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Легко проверить справедливость равенств: **EA** = **AE** = **A**. Здесь **A** – квадратная матрица, и размеры **A** и **E** одинаковы.

Пусть **A** – квадратная матрица. **Обратной матрицей** к матрице **A** называется такая матрица $\mathbf{A}^{-1}$, для которой справедливы равенства:

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{E}.$$

Очевидно, что $\mathbf{A}^{-1}$ – квадратная матрица того же размера, что и матрица **A**. Сразу заметим, что **не всякая квадратная матрица имеет обратную матрицу**.

Поставим задачу: найти обратную матрицу к матрице

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Условие

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} = \mathbf{A}^{-1},$$

сводится к трём системам уравнений, которые будем решать одновременно, используя метод Жордана-Гаусса. Матрица, представляющая расширенные матрицы всех трёх систем, примет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Подвергая её преобразованиям по методу Жордана-Гаусса, последовательно будем получать:

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 5 & 3 & 2 & 0 & -1\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}1 & 0 & 5 & -1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 8 & -3 & 5 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}8 & 0 & 0 & 7 & -9 & 5\\ 0 & 8 & 0 & 5 & -3 & 1\\ 0 & 0 & 8 & -3 & 5 & -1\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & \frac{7}{8} & -\frac{9}{8} & \frac{5}{8}\\ 0 & 1 & 0 & \frac{5}{8} & -\frac{3}{8} & -\frac{1}{8}\\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{8} & \frac{5}{8} & -\frac{1}{8}\end{pmatrix} \qquad (4)$$

Как и в предыдущем примере, можно сказать, что три последних столбца образуют искомую матрицу, то есть

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix}\frac{7}{8} & -\frac{9}{8} & \frac{5}{8}\\ \frac{5}{8} & -\frac{3}{8} & -\frac{1}{8}\\ -\frac{3}{8} & \frac{5}{8} & -\frac{1}{8}\end{pmatrix}.$$

Теперь сформулируем правило, по которому находится матрица, обратная к квадратной матрице **A** размера n.

Нужно выписать матрицу размерности $n \times 2n$, первые n столбцов которой образованы матрицей **A**, а последние n столбцов образуют единичную матрицу **E**. Построенная таким образом матрица преобразуется по методу Жордана-Гаусса так, чтобы на месте матрицы **A** получилась единичная матрица, если это возможно. Тогда на месте матрицы **E** получается матрица $\mathbf{A}^{-1}$.

Если матрицу A нельзя методом Жордана-Гаусса преобразовать к единичной матрице, то $\mathbf{A}^{-1}$ не существует. Так матрица

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 1\\ 4 & 5 & 7\end{pmatrix}$$

не имеет обратной. Читатель может в этом убедиться самостоятельно.

§4. Определители

Рассмотрим систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными в общем виде:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}.$$

Найдем x_1 следующим образом: чтобы исключить x_2, умножим первое уравнение на a_{22} и из полученного уравнения вычтем второе, умноженное на a_{12}:

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12}. \qquad (1)$$

Обозначим $\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$, $\Delta_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12}$.

Для определения x_2 поступим так: умножим второе уравнение на a_{11} и из полученного уравнения вычтем первое, умноженное на a_{21}:

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - a_{21}b_1. \qquad (2)$$

Обозначим $\Delta_2 = a_{11}b_2 - a_{21}b_1$.

Из (1) и (2) видно, что если $\Delta \neq 0$, то система имеет единственное решение[1], определяемое формулой

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, \quad i = 1, 2. \qquad (3)$$

Величина Δ называется **определителем матрицы второго порядка**

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Вообще **определителем произвольной матрицы второго порядка** $\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}$ называется число, которое обозначается $\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix}$ и равно произведению двух чисел, стоящих на главной диагонали минус произведение двух чисел, стоящих на другой диагонали: $\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21}$.

Например,

$$\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -2 & -5 \end{vmatrix} = -15 - 8 = -23.$$

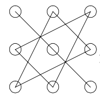
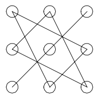
Из сказанного следует, что величины Δ_1 и Δ_2 в (3) тоже являются определителями:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}; \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

Рассмотрим теперь систему трех линейных уравнений с тремя неизвестными:

[1] Если говорить строго, то из (1) и (2) следует, что если решение существует, то оно единственным образом выражается через коэффициенты системы и свободные члены. Чтобы доказать существование, надо подставить две формулы (3) в систему и убедиться в том, что оба уравнения обращаются в верные равенства.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}. \qquad (4)$$

Введем определение. Определителем произвольной квадратной матрицы третьего порядка $\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}$ называется сумма шести слагаемых, каждое из которых представляет собой произведение трех элементов матрицы, выбираемых по следующему правилу: три произведения элементов, стоящих на главной диагонали и в вершинах двух треугольников: , берутся со знаком "+", а три произведения элементов, стоящих на второй диагонали и в вершинах двух других треугольников: , берутся со знаком "–". Определитель третьего порядка обозначается так:

$$\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix}.$$

Например,

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -1 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & 9 \end{vmatrix} =$$

$$= 2\cdot(-2)\cdot 9 + 3\cdot 3\cdot 2 + (-1)\cdot 4\cdot 5 - 2\cdot(-2)\cdot 5 - (-1)\cdot 3\cdot 9 - 4\cdot 3\cdot 2 =$$
$$= -36 + 18 - 20 + 20 + 27 - 24 = -15$$

Решая систему (4), например методом Гаусса, можно получить равенства

$$\Delta\cdot x_1 = \Delta_1;\ \Delta\cdot x_2 = \Delta_2;\ \Delta\cdot x_3 = \Delta_3, \qquad (5)$$

где

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}; \Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix};$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}; \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

Из формул (5) видно, что если $\Delta \neq 0$, то единственным образом определяется решение системы:

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, i = 1,2,3.$$

Решая квадратные системы линейных уравнений 4-го, 5-го или любого более высокого порядка, можно получить формулы, аналогичные формулам (1), (2) или (5).

Дадим определение **определителя**

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

квадратной матрицы *n*-го порядка или просто **определителя *n*-го порядка**. (В дальнейшем, принимая во внимание введённое обозначение, под элементами, строками и столбцами определителя матрицы будем подразумевать элементы, строки и столбцы этой матрицы.)

Сформулируем понятие $n!$ (читается *эн факториал*): **если** n **– натуральное (целое положительное) число, то** $n!$ **– это произведение всех натуральных чисел от** 1 **до** n.

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1)\, n.$$

Например,

$$5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120.$$

Замечание: в некоторых книгах вместо термина "определитель" используется термин "детерминант" и определитель матрицы **A** обозначается det**A**.

Определителем n**-го порядка называется сумма** $n!$ **слагаемых. Каждое слагаемое представляет собой произведение** n **элементов, взятых по одному из каждой строки и каждого столбца определителя**[2] **.** (Произведения отличаются одно от другого набором элементов.) **Перед каждым произведением ставится**
знак "+" или "–". Покажем, как определить, какой нужно ставить знак перед

[2] Попробуйте доказать сами, что таких произведений, отличающихся одно от другого набором элементов существует ровно n!

произведением.

Так как в каждом произведении присутствует один элемент из 1-й строки, один элемент из 2-ой и т.д., то произведение в общем виде можно записать так:

$$a_{1i} \cdot a_{2j} \cdot a_{3k} \cdot \ldots \cdot a_{ns}.$$

Здесь $i, j, k, \ldots, s$ – номера столбцов, в которых стоят элементы, выбранные из 1-й, 2-й, 3-й, ... n-й строк, соответственно. Ясно из сказанного выше, что каждое из чисел $i, j, k, \ldots, s$ равно какому-либо из чисел 1, 2, ..., n, и что все числа $i, j, k, \ldots, s$ – различные.

Расположенные в данном порядке

$$i, j, k, \ldots, s,$$

эти числа образуют **"перестановку"** из чисел 1, 2, ..., n (**перестановкой называется заданный порядок в конечном множестве**).

Взаимное расположение двух чисел в перестановке, когда большее стоит впереди меньшего называется **инверсией**. Например, в перестановке 3, 1, 2, 5, 4 три инверсии; в перестановке 2, 6, 3, 1, 4, 5 – шесть инверсий.

Перестановка называется **четной**, если в ней четное число инверсий и **нечетной**, если число инверсий нечетное.

Теперь можно сформулировать правило: **произведение** $a_{1i} \cdot a_{2j} \cdot a_{3k} \cdot \ldots \cdot a_{ns}$ **берется со знаком "+", если вторые индексы образуют четную перестановку, и со знаком "–", если нечетную.**

Из определения определителя можно вывести следующие его свойства.

1. Если поменять местами две строки определителя (два столбца), то получим новый определитель, равный исходному, умноженному на -1.

2. Определитель, имеющий две равных строки (два равных столбца), равен нулю.

3. Если одну из строк определителя умножить на какое-либо число, то получится определитель, равный исходному, умноженному на это число.

4. Определитель транспонированной[3] матрицы равен определителю исходной матрицы.

5. Если в определителе вместо любой строки записать сумму этой строки и любой другой строки, умноженной на некоторое число, то полученный новый определитель будет равен исходному.

[3] i-я строка исходной матрицы **A**, имеющей m строк, является i-м столбцом транспонированной матрицы $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ $(i = 1, 2 \ldots m)$. Например,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, A^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Операцию транспонирования матрицы можно назвать поворотом на 180° вокруг главной диагонали.

До сих пор было показано, как вычислять определитель второго и третьего порядков. Чтобы вычислить определитель более высоких порядков, пользуются формулой Лапласа разложения определителя по строке или столбцу:

$$\det\mathbf{A} = a_{i1}(-1)^{i+1}M_{i1} + a_{i2}(-1)^{i+2}M_{i2} + \ldots + a_{in}(-1)^{i+n}M_{in} =$$

$$= a_{1j}(-1)^{1+j}M_{1j} + a_{2j}(-1)^{2+j}M_{2j} + \ldots + a_{nj}(-1)^{n+j}M_{nj}$$

Здесь i и j — любые числа от 1 до n. Последняя формула представляет собой разложение определителя по i-й строке или j-му столбцу. M_{ij} называется **минором** и равняется определителю порядка $n - 1$, который получается из определителя $\det\mathbf{A}$, если вычеркнуть i-ю строку и j-й столбец. Произведение $(-1)^{i+j}M_{ij}$ обозначается A_{ij} и называется **алгебраическим дополнением элемента** a_{ij}.

Пусть Δ – определитель четвертого порядка: $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & -2 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$.

Представим его разложение по второй строке:

$$\Delta = 2(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 5 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} + (-1)(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -3 & -2 & 5 \\ 6 & 8 & 9 \end{vmatrix} + 1(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & 1 & 5 \\ 6 & 7 & 9 \end{vmatrix} + 0,$$

и по второму столбцу:

$$\Delta = 1(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -3 & 1 & 5 \\ 6 & 7 & 9 \end{vmatrix} + 1(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & 1 & 5 \\ 6 & 7 & 9 \end{vmatrix} +$$

$$+ (-2)(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ 6 & 7 & 9 \end{vmatrix} + 8(-1)^{4+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ -3 & 1 & 5 \end{vmatrix}.$$

Аналогичным образом можно вычислить Δ, разлагая его по первой, третьей, четвертой строке или по первому, второму или четвертому столбцу.

Вычисление определителя четвертого порядка сводится в худшем случае (если среди элементов нет нулей) к вычислению четырех определителей третьего порядка.

Аналогичным образом вычисление определителя 5-го порядка сводится к вычислению 5-ти определителей 4-го порядка и т.д.

Для того, чтобы получить представление о том, что такое определитель *n*-го порядка, не прибегая к определению на предыдущей странице, можно поступить так: выучить, как вычисляются определители 2-го и 3-го порядков и как по методу Лапласа сводить вычисление определителя *n*-го порядка к вычислению определителя *n* – 1-го порядка. Тогда становится понятным, как вычислять определитель 4-го порядка, затем 5-го порядка и т. д.

Из сказанного следует, что вычисление определителя 5-го порядка можно в общем случае свести к вычислению 20-ти(!) определителей 3-го порядка, что очень затрудняет задачу.

Вычисление определителя упрощается, если воспользоваться свойством 5. Пусть Δ – определитель четвертого порядка:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 6 \\ -2 & -1 & 3 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 7 \end{vmatrix}.$$

Этот определитель разложим по третьей строке, так как там есть нуль и, что особенно важно, –1. Задача заключается в таком преобразовании определителя Δ, чтобы получить нули на месте a_{31} и a_{33}. К первому столбцу прибавим второй столбец, умноженный на –2, а к третьему столбцу прибавим второй столбец, умноженный на –3. Второй столбец, с помощью которого проводились преобразования, остается без изменений.

Таким образом вычисление определителя 4-го порядка сведено к вычислению только одного определителя 3-го порядка:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -4 & 3 & 5 & 5 \\ -1 & 2 & 7 & 6 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 11 & 7 \end{vmatrix} = 1(-1)^{3+2} \begin{vmatrix} -4 & 5 & 5 \\ -1 & 7 & 6 \\ -2 & 11 & 7 \end{vmatrix}.$$

Пусть теперь Δ — определитель 5-го порядка:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 & 9 & -4 \\ 2 & 3 & 5 & 8 & -6 \\ 3 & 7 & -5 & 9 & 3 \\ 4 & -6 & -9 & 11 & 7 \\ 5 & 8 & 7 & 6 & -4 \end{vmatrix}.$$

Предположим, что мы решили разложить его по первому столбцу. Можно поступить следующим образом. Оставим первую строку без изменений. Вторую строку умножим на 3 и прибавим к ней первую, умноженную на –2. При этом обязательно за знак определителя выносится множитель $\frac{1}{3}$ (см. свойство 3). Вместо третьей строки пишем сумму третьей и умноженной на -1 первой. Четвертую строку умножаем на 3 и прибавляем первую, умноженную на –4, опять вынося множитель $\frac{1}{3}$ за знак определителя. Пятую строку умножаем на 3, прибавляем к ней первую, умноженную на –5 и опять выносим $\frac{1}{3}$ за знак определителя. Теперь получим

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 5 & . & . & . \\ 0 & . & . & . & . \\ 0 & . & . & . & . \\ 0 & . & . & . & . \\ 0 & . & . & . & . \end{vmatrix} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}.$$

Теперь вычисление определителя 5-го порядка сведено к вычислению только одного определителя 4-го порядка.

Таким образом, пользуясь свойствами определителя и методом Лапласа, можно вычисление определителя *n*-го порядка свести к вычислению лишь одного определителя порядка *n* – 1.

§5. Вычисление обратной матрицы

Пусть $\mathbf{A} = (a_{ij})$ – квадратная матрица с определителем, не равным нулю. Тогда существует обратная матрица $\mathbf{A}^{-1}$, которая вычисляется по формуле

$$\mathbf{A}^{-1} = \left(c_{ij}\right) = \left(\frac{A_{ji}}{\det \mathrm{A}}\right).$$

Последняя формула означает, что **в *i*-й строке и *j*-м столбце** обратной матрицы располагается алгебраическое дополнение элемента, стоящего **в *j*-й**

строке и в *i*-м столбце исходной матрицы, деленное на определитель исходной матрицы.

Напомним здесь, что $A_{pq} = (-1)^{p+q}M_{pq}$, где M_{pq} называется минором и представляет собой определитель, получающийся из определителя det**A** вычеркиванием *p*-й строки и *q*-го столбца.

Рассмотрим пример:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \det\mathbf{A} = 20 + 6 - 24 = 2;$$

$$\begin{matrix} A_{11} = 20, & A_{12} = -9, & A_{13} = -15, \\ A_{21} = -8, & A_{22} = 4, & A_{23} = 6, \\ A_{31} = 2, & A_{32} = -1, & A_{33} = -1; \end{matrix} \qquad \mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 10 & -4 & 1 \\ -\frac{9}{2} & 2 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{15}{2} & 3 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Еще раз подчеркнем, что обратная матрица существует только для квадратной матрицы с определителем, отличным от нуля!

§6. Правило Крамера решения квадратных систем линейных уравнений.

Пусть мы имеем квадратную систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}.$$

Ее можно записать в матричной форме:

$$\mathbf{AX} = \mathbf{B},$$

где

$$\mathbf{A} = (a_{ij}) i, j = 1,2,\ldots,n; \mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}; \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Если определитель матрицы A не равен нулю, то система имеет единственное решение, определяемое формулами:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} \\ x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta} \\ \ldots \quad \ldots \\ x_n = \dfrac{\Delta_n}{\Delta} \end{cases}.$$

Здесь Δ_i – определитель n-го порядка, получающийся из определителя Δ матрицы **A** коэффициентов системы заменой i-го столбца столбцом свободных членов.

Например,

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 3 \\ 4x_1 + x_2 + 3x_3 = 5 \end{cases};$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -17; \qquad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 5 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -16;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 3; \qquad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 5 \end{vmatrix} = -8;$$

$$x_1 = \frac{16}{17}; \quad x_2 = -\frac{3}{17}; \quad x_3 = \frac{8}{17}.$$

Отметим, что если определитель матрицы A коэффициентов квадратной системы линейных уравнений равен нулю, то возможен один из двух случаев: либо система несовместна, либо она совместна и неопределенна.