## <u>*Формулы Маклорена для функций*</u>

## $(1+x)^{\alpha}$, $e^{x}$, $\cos x$, $\sin x$, $\ln(1+x)$

Всюду ниже $\xi = \theta x$, $0 < \theta < 1$.

**1.** $$(1+x)^{\alpha} = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \ldots +$$
$$+ \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n)}{(n+1)!}(1+\xi)^{\alpha-n-1}x^{n+1}.$$

В частности: при $\alpha = 1/2$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + \ldots +$$
$$+ \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\ldots\left(\frac{1}{2}-n+1\right)\frac{x^n}{n!} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\ldots\left(\frac{1}{2}-n\right)(1+\xi)^{-\frac{1}{2}-n}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!},$$

при $\alpha = -1$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^n x^n + (-1)^{n+1}(1+\xi)^{-n-2}x^{n+1}$$

при $\alpha = k \le n$, $k \in \mathbb{N}$, имеем так называемую формулу *бинома Ньютона*:

$$(1+x)^k = 1 + kx + \frac{k(k-1)}{2!}x^2 + \frac{k(k-1)(k-2)}{3!}x^3 + \ldots +$$
$$+ \frac{k\cdot(k-1)\cdot\ldots\cdot 5\cdot 4\cdot 3}{(k-2)!}x^{k-2} + \frac{k\cdot(k-1)\cdot\ldots\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{(k-1)!}x^{k-1} +$$
$$+ \frac{k\cdot(k-1)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{k!}x^k =$$
$$= 1 + C_k^1 x + C_k^2 x^2 + C_k^3 x^3 + \ldots + C_k^{k-2}x^{k-2} + C_k^{k-1}x^{k-1} + C_k^k x^k =$$
$$= 1 + kx + C_k^2 x^2 + C_k^3 x^3 + \ldots + C_k^2 x^{k-2} + kx^{k-1} + x^k,$$

где $C_n^m = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$, $\quad C_n^m = C_n^{n-m}$.

**2.** $$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^{\xi}}{(n+1)!}x^{n+1};$$

**3.** $$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!} + (-1)^{k+1}\frac{\sin\xi}{(2k+1)!}x^{2k+1};$$

**4.** $$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + (-1)^{k+1}\frac{\sin\xi}{(2k+2)!}x^{2k+2};$$

**5.** $$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + (-1)^n\frac{(1+\xi)^{-(n+1)}}{n+1}x^{n+1}.$$