Тема: «**Формула Тейлора**»

1. Функцию $f(x)=e^x$ разложить по степеням бинома $x+1$ до члена, содержащего $(x+1)^3$ с остаточным членом а) в форме Пеано; б) в форме Лагранжа.

2. Функцию $f(x)=\ln x$ разложить по степеням $x-1$ до члена, содержащего $(x-1)^2$.

3. Функцию $f(x)=\sin x$ разложить по степеням x до члена, 1) содержащего x^3; 2) содержащего x^5 с остаточными членами а) в форме Пеано; б) в форме Лагранжа.

4. Показать, что $\sin(a+h)$ отличается от $(\sin a+h\cos a)$ не более чем на $\frac{1}{2}h^2$.

5. Выяснить происхождение приближенных формул:

$$\sqrt{1+x}\approx 1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2,\ -1<x<1;$$

$$\sqrt[3]{1+x}\approx 1+\frac{1}{3}x-\frac{1}{9}x^2,\ -1<x<1.$$

6. Оценить погрешность формулы $e\approx 2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}$.

7. Следующие функции разложить по степеням x до слагаемого, содержащего x^n, с остаточным членом в форме Лагранжа:

1) $f(x)=(1+x)^\alpha$, $\alpha\in\mathbb{R}$ ($\mathbb{R}$ – множество действительных чисел);

$f(x)=\sqrt{1+x}$; $\quad f(x)=\frac{1}{1+x}$;

$f(x)=(1+x)^k$, $k\in\mathbb{N}$, ($\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел);

2) $f(x)=e^x$; $\quad$ 3) $f(x)=\cos x$;

4) $f(x)=\sin x$; $\quad$ 5) $f(x)=\ln(1+x)$.

Ответы.

1. а) $e^x=\frac{1}{e}+(x+1)\frac{1}{e}+\frac{(x+1)^2}{2!}\frac{1}{e}+\frac{(x+1)^3}{3!}\frac{1}{e}+o\left((x+1)^3\right)$;

б) $e^x = \frac{1}{e} + (x+1)\frac{1}{e} + \frac{(x+1)^2}{2!}\frac{1}{e} + \frac{(x+1)^3}{3!}\frac{1}{e} + \frac{(x+1)^4}{4!}e^{\xi}$,

где $\xi = -1 + \theta(x+1)$, $0 < \theta < 1$.

2. а) $\ln x = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + o\left((x-1)^2\right)$;

б) $\ln x = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{2(x-1)^3}{6\xi^3}$, где $\xi = 1 + \theta(x-1)$, $0 < \theta < 1$.

3. 1) а) $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o\left(x^3\right)$,

б) $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}\sin\xi_1$, где $\xi_1 = \theta_1 x$, $0 < \theta_1 < 1$;

2) а) $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o\left(x^5\right)$,

б) $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^6}{6!}\sin\xi_2$, где $\xi_2 = \theta_2 x$, $0 < \theta_2 < 1$.

6. Погрешность меньше $\frac{3}{5!} = \frac{1}{40}$.

7. Ответы см. в файле «ФОРМУЛЫ МАКЛОРЕНА ДЛЯ НЕКОТОРЫХ ФУНКЦИЙ».

Используя формулы Маклорена для функций $(1+x)^{\alpha}$, e^x, $\cos x$, $\sin x$, $\ln(1+x)$, написать разложения по целым неотрицательным степеням переменной x до членов указанного порядка включительно следующих функций:

8. $y = \frac{1+x+x^2}{1-x+x^2}$ до члена с x^4. Чему равно $y^{(4)}(0)$?

9. $y = \frac{(1+x)^{100}}{(1-2x)^{40}(1+2x)^{60}}$ до члена с x^2.

10. $y = \sqrt{1-2x+x^3} - \sqrt[3]{1-3x+x^2}$ до члена с x^3.

11. $y = e^{2x-x^2}$ до члена с x^5.

12. $y = \frac{x}{e^x - 1}$ до члена с x^4.

13. $y = \sqrt[3]{\sin x^3}$ до члена с x^{13}.

14. $y = \ln(\cos x)$ до члена с x^6.

15. $y = \sin(\sin x)$ до члена с x^3.

16. $y = \operatorname{tg} x$ до члена с x^5.

17. $y = \ln \dfrac{\sin x}{x}$ до члена с x^6.

<u>*Ответы.*</u>

8. $1 + 2x + 2x^2 - 2x^4 + o(x^4)$; $y^{(4)}(0) = -48$.

9. $1 + 60x + 1950x^2 + o(x^2)$.

10. $\dfrac{1}{6}x^2 + x^3 + o(x^3)$.

11. $1 + 2x + x^2 - \dfrac{2}{3}x^3 - \dfrac{5}{6}x^4 - \dfrac{1}{15}x^5 + o(x^5)$.

12. $1 - \dfrac{x}{2} + \dfrac{x^2}{12} - \dfrac{x^4}{720} + o(x^4)$.

13. $x - \dfrac{x^7}{18} - \dfrac{x^{13}}{3240} + o(x^{13})$.

14. $-\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^4}{12} - \dfrac{x^6}{45} + o(x^6)$.

15. $x - \dfrac{x^3}{3} + o(x^3)$.

16. $x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{2x^5}{15} + o(x^5)$.

17. $-\dfrac{x^2}{6} - \dfrac{x^4}{180} - \dfrac{x^6}{2835} + o(x^6)$.

Литература

3. Мантуров О.В., Матвеев Н.М. Курс высшей математики: Линейная алгебра. Аналитическая геометрия. Дифференциальное исчисление функции одной переменной: учеб. для студентов втузов. – М.: Высшая школа, 1986.

4. Задачи и упражнения по математическому анализу для втузов: учеб. пособ. для студентов высш. техн. учеб. заведений / Г.С.Бараненков, Б.П.Демидович, В.А.Ефименко и др.; под ред. Б.П.Демидовича. – М.: АСТ: Астрель, 2006.

Автор: Никитина Н.С.