Список примеров и задач для подготовки к экзамену по линейной алгебре

Никитина Н.С., Степанов А.В.
Высшая алгебра в примерах и задачах : учебное пособие / Н.С. Никитина, А.В. Степанов. Моск. гос. ин-т междунар. отношений (ун-т) МИД России, каф. математики, эконометрики и информационных технологий. — М. : МГИМО-Университет, 2017.

Глава 1. **Комплексные числа**
Примеры №№ 3, 4, 6, 8, 10, 11

Глава 2. **Многочлены**
Примеры №№ 1, 5, 6, 9, 10, 11, 12

Глава 3. **Алгебра матриц. Определители**
Примеры №№ 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18

Глава 4. **Системы линейных алгебраических уравнений**
Примеры №№ 3, 4

Глава 5. **Линейная зависимость системы векторов**
Примеры №№ 1, 6

Глава 6. **Линейные пространства**
Примеры №№ 7, 8, 9, 11, 12, 13, 14, 15, 18

Пример 1. В линейном пространстве L_2 два базиса: $e=\{\bar{e}_1,\bar{e}_2\}$, $f=\{\bar{f}_1,\bar{f}_2\}$, и вектор $\bar{a}$ заданы своими координатами в другом, отличном от базисов *e* и *f*, базисе $g=\{\bar{g}_1,\bar{g}_2\}$ этого линейного пространства:

$$e_{1g}=\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix},\ e_{2g}=\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}\ \text{и}\ f_{1g}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\ f_{2g}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix};\quad a_g=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}.$$

Найти (А) матрицу перехода от базиса e к базису f;
(Б) матрицу перехода от базиса f к базису e.
Указать (В) разложение вектора $\bar{a}$ по базису e;
(Г) разложение вектора $\bar{a}$ по базису f.

Ответы: (А) $T_{e\to f}=\dfrac{1}{7}\begin{pmatrix}-2&-5\\3&4\end{pmatrix}$; (Б) $T_{f\to e}=\begin{pmatrix}4&5\\-3&-2\end{pmatrix}$;

(В) $\bar{a}=\frac{1}{7}\left(-\bar{e}_1+5\bar{e}_2\right)$; (Г) $\bar{a}=3\bar{f}_1-\bar{f}_2$.

<u>*Пример 2.*</u> В двумерном линейном пространстве многочленов M_1 степени не выше первой заданы два базиса: $e=\{\bar{e}_1,\ \bar{e}_2\}$, $f=\{\bar{f}_1,\ \bar{f}_2\}$:

$$\bar{e}_1=1+x,\ \ \bar{e}_2=1+2x \ \text{ и } \ \bar{f}_1=2+x,\ \ \bar{f}_2=1-x.$$

(А) Найти матрицу перехода от базиса e к базису f.

(Б) Записать разложения векторов базиса f по базису e.

Ответы: (А) $T_{e\to f}=\begin{pmatrix}3 & 3\\ -1 & -2\end{pmatrix}$; (Б) $\bar{f}_1=3\bar{e}_1-\bar{e}_2$, $\bar{f}_1=3\bar{e}_1-2\bar{e}_2$.

<u>*Пример 3.*</u> В двумерном линейном пространстве диагональных матриц второго порядка заданы два базиса: $e=\{\bar{e}_1,\ \bar{e}_2\}$, $f=\{\bar{f}_1,\ \bar{f}_2\}$:

$$\bar{e}_1=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix},\ \bar{e}_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix} \ \text{ и } \ \bar{f}_1=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix},\ \bar{f}_2=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

(А) Найти матрицу перехода от базиса e к базису f.

(Б) Записать разложения векторов базиса f по базису e.

Ответы: (А) $T_{e\to f}=\begin{pmatrix}-4 & 3\\ 7 & -4\end{pmatrix}$; (Б) $\bar{f}_1=-4\bar{e}_1+7\bar{e}_2$, $\bar{f}_1=3\bar{e}_1-4\bar{e}_2$.

Глава 7. **Линейные операторы в произвольном линейном пространстве**

Примеры №№ 3, 4, 5, 6, 11, 12

<u>*Пример 1.*</u> В двумерном линейном пространстве многочленов M_1 степени не выше первой заданы вектор $\bar{a}=2x+3$ и базис $e=(\bar{e}_1,\ \bar{e}_2)$: $\bar{e}_1=1+x$, $\bar{e}_2=1-x$. Матрица линейного оператора $\hat{A}$, действующего в указанном пространстве, в базисе e имеет вид $A_e=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}$.

(А) Найти вектор координат вектора $\hat{A}\bar{a}$ в базисе e.

(Б) Записать вектор $\hat{A}\bar{a}$ линейного пространства многочленов M_1.

Ответы: (А) $(\hat{A}\bar{a})_e=\begin{pmatrix}2{,}5\\ 5{,}5\end{pmatrix}$; (Б) $\hat{A}\bar{a}=8-3x$.

Пример 2. В двумерном линейном пространстве диагональных матриц второго порядка заданы вектор $\bar{a} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ и базис $e = (\bar{e}_1, \bar{e}_2)$: $\bar{e}_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\bar{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Матрица линейного оператора $\hat{A}$, действующего в указанном пространстве, в базисе e имеет вид $A_e = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

(А) Найти вектор координат вектора $\hat{A}\bar{a}$ в базисе e.

(Б) Записать вектор $\hat{A}\bar{a}$ линейного пространства диагональных матриц второго порядка.

Ответы: (А) $(\hat{A}\bar{a})_e = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \end{pmatrix}$; (Б) $\hat{A}\bar{a} = \begin{pmatrix} 21 & 0 \\ 0 & 13 \end{pmatrix}$.

Комментарий к примеру 6 на стр. 118. Рассмотрим в качестве трехмерного линейного пространства арифметическое линейное пространство R^3. Тогда условия примера можно записать следующим образом:

$$\hat{A}\bar{x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\bar{x}, \quad \hat{B}\bar{x} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\bar{x}, \quad \hat{C}\bar{x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}\bar{x} \quad \forall\, \bar{x} \in R^3,$$

и сформулировать следующие вопросы.

(А) Чему равна сумма $\hat{A} + \hat{B}$ операторов $\hat{A}$ и $\hat{B}$?

Ответ: $$(\hat{A} + \hat{B})\bar{x} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right)\bar{x} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\bar{x}.$$

(Б) Чему равно произведение $\hat{A}\hat{C}$ операторов $\hat{A}$ и $\hat{C}$?

Ответ: $$\hat{A}\hat{C}\bar{x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}\bar{x} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 3 \end{pmatrix}\bar{x}.$$

Глава 8. **Евклидовы пространства**

Примеры №№ 1, 3, 4, 5, 7

Указание. Ортонормировать системы векторов евклидова пространства по определению, не используя готовые формулы, то есть руководствуясь алгоритмом ортогонализации, изложенным на стр. 156-157.

Глава 9. **Линейные операторы, действующие в евклидовом пространстве**
Примеры №№ 11

Глава 10. **Квадратичные формы**
Примеры №№ 1, 2, 3, 4, 5

Пусть $F = F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – квадратичная форма от n действительных переменных $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$:

$$F = F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_i\, x_j\,,$$

или в матричной форме:

$$F = X^T A X\,,$$

где $A = (a_{ij})$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $X^T = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \end{pmatrix}$.

В этой квадратичной форме выполним следующую замену переменных:

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} q_{ij}\, y_j\,,\quad i=1, 2, \ldots, n,$$

или в матричной форме: $X = QY$, где $Q = (q_{ij})$, $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$. В результате квадратичная форма $F = F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ с матрицей $A = (a_{ij})$ от переменных $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$ переходит в квадратичную форму $\Phi = \Phi(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ с матрицей $P = (p_{ij})$ от переменных $y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n$:

$$F = F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_i\, x_j = X^T A X$$

$$= \Phi = \Phi(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} p_{ij}\, y_i\, y_j = Y^T P Y\,,$$

причем $P = Q^T AQ$.

Преобразование $X = QY$ называют *линейным преобразованием переменных* $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Матрицу $Q = (q_{ij})$ называют *матрицей линейного преобразования* $X = QY$. При этом говорят о линейном преобразовании переменных с матрицей Q, приводящем квадратичную форму F к виду Φ.

Определения. 1. Число положительных квадратов в нормальной форме, к которой приводится квадратичная форма, называется *положительным индексом инерции* этой формы.

2. Число отрицательных квадратов в нормальной форме, к которой приводится квадратичная форма, называется *отрицательным индексом инерции* этой формы.

Определение. Квадратичная форма $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется *положительно определенной*, если для всех значений переменных x_1, x_2, …, x_n выполняется условие $F(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geq 0$, причем $F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$ только при $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$.

Теорема. Квадратичная форма является положительно определенной тогда и только тогда, когда ее нормальный вид содержит n положительных квадратов, то есть и ранг, и положительный индекс инерции квадратичной формы равны числу неизвестных n.

Определение. Квадратичная форма $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется *отрицательно определенной*, если для всех значений переменных x_1, x_2, …, x_n выполняется условие $F(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq 0$, причем $F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$ только при $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$.

Теорема. Квадратичная форма является отрицательно определенной тогда и только тогда, когда ее нормальный вид содержит n отрицательных квадратов, то есть и ранг, и отрительный индекс инерции квадратичной формы равны числу неизвестных n.

Для матрицы $A = (a_{ij})$ n-го порядка миноры

$$D_1 = a_{11},\ D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \ldots,\ D_k = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}, \ldots,$$

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \det A,$$

расположенные в ее левом верхнем углу, называют *главными* (или *угловыми*) *минорами* матрицы $A = (a_{ij})$.

Теоремы (*критерии Сильвестра*). 1 Квадратичная форма является положительно определенной тогда и только тогда, когда все угловые миноры ее матрицы положительны, то есть $D_k > 0$, $k = 1, 2, \dots, n$.

1 Квадратичная форма является отрицательно определенной тогда и только тогда, когда знаки угловых миноров ее матрицы чередуются, начиная с $D_1 = a_{11} < 0$, то есть $(-1)^k D_k > 0$, $k = 1, 2, \dots, n$.

Неопределенными квадратичными формами будем называть квадратичные формы, принимающие как положительные, так и отрицательные значения, то есть это квадратичные формы, нормальный вид которых содержит как положительные, так и отрицательные квадраты.

Настоятельная рекомендация!!! Уважаемые студенты, при выполнении экзаменационной работы придерживайтесь тех определений и обозначений, которые были введены и использовались на лекциях и семинарах. Смотрите: ***Приложение 1.*** **Теоретические сведения** (стр. 148), а также файлы по линейной алгебре на сайте кафедры.

В противном случае при использовании отличных от указанных определений и обозначений вы обязаны определения – формулировать, а обозначения – вводить.

Автор: Н.С. НИКИТИНА