***Тема*: «Системы линейных алгебраических уравнений»**

Система алгебраических уравнений	**Множество решений системы**
Несовместная	Пустое множество решений: $\varnothing$, то есть система не имеет решений
Совместная:	Множество решений не является пустым, то есть система имеет решения:
определенная	единственное решение (множество решений системы состоит из одного вектора);
неопределенная	неединственное решение. В случае системы линейных алгебраических уравнений множество решений системы является бесконечным.

Две системы уравнений называются *эквивалентными*, если равны их множества решений.

Рассмотрим систему линейных алгебраических уравнений $Ax = b$. *Элементарными преобразованиями* расширенной матрицы системы $[Ab]$ будем называть следующие операции:

1) умножение строки на произвольное отличное от нуля число с последующим сложением с другой строкой и записью полученного результата вместо первой или второй строки;

2) перестановку строк матрицы;

3) перестановку столбцов матрицы без участия последнего.

Теорема. Рассмотрим две системы линейных алгебраических уравнений: $Ax = b$ и $Ux = c$. Если от расширенной матрицы $[Ab]$ к матрице $[U\ c]$ можно перейти конечным числом элементарных преобразований, то системы $Ax = b$ и $Ux = c$ эквивалентны.

Структура общего решения неоднородной системы линейных алгебраических уравнений $Ax=b$:

общее решение неоднородной системы уравнений $Ax=b$	=	общее решение однородной системы уравнений $Ax=0$	+	частное решение неоднородной системы уравнений $Ax=b$.

<u>*Теорема Кронекера-Капелли*</u>. Система линейных алгебраических уравнений $Ax=b$ совместна тогда и только тогда, когда $Rg A = Rg[A\,b]$, то есть когда ранг матрицы системы равен рангу расширенной матрицы этой системы.

Сформулируем несколько очевидных утверждений для однородной системы линейных алгебраических уравнений $Ax=0$ с матрицей A размеров $m \times n$, то есть речь пойдет о системе, содержащей m уравнений с n неизвестными: $x_1, x_2, \ldots, x_n$ $\quad (x=(x_1, x_2, \ldots, x_n)^T)$.

1. Если $Rg A = n$, то система $Ax=0$ является определенной, то есть имеет единственное нулевое решение.

2. Если $Rg A < n$, то система $Ax=0$ является неопределенной, то есть имеет бесконечное множество решений, содержащее, конечно, и нулевое решение. Отметим, что это утверждение справедливо, в частности, если $m<n$, то есть когда число уравнений меньше числа неизвестных.

Пусть $Rg A < n$, то есть ограничимся рассмотрением неопределенной однородной системы уравнений $Ax=0$.

(А) Всякую максимальную линейно независимую систему решений системы уравнений $Ax=0$ называют *фундаментальной системой решений*. Число векторов в фундаментальной системе решений равно $n - Rg A$.

(Б) Множество всех решений системы уравнений $Ax=0$ является линейным подпространством n-мерного арифметического пространства R^n.

(В) Фундаментальная система решений является базисом этого подпространства. Размерность рассматриваемого подпространства равна $n - Rg A$.

При решении систем линейных алгебраических уравнений $Ax=b$ методом Гаусса переменные x_i, соответствующие столбцам с ведущими элементами, мы назвали *базисными*, а оставшиеся переменные – *свободными*. (Напомним: $x=(x_1, x_2, \dots, x_n)^T$.)

Базисные переменные определяются неоднозначно так же, как и базисные столбцы, базисные строки и базисные миноры матрицы системы A. Переменные, соответствующие базисным столбцам матрицы A также являются базисными.

Число базисных переменных	=	$Rg\,A$	=	Число ведущих элементов в методе Гаусса.	=	Число отличных от нуля строк ступенчатой матрицы, получаемой при метода Гаусса.	=	

=	Число базисных строк матрицы A.	=	Число базисных столбцов матрицы A.	=	Порядок базисного минора матрицы A.	

Число свободных переменных	=	$n - Rg\,A$	=	Число векторов в фундаментальной системе решений однородной системы $Ax=0$.

Автор: Н.С. НИКИТИНА