***Тема*: «Элементы комбинаторики»**

Комбинаторика – раздел математики, изучающий, в частности, методы решения комбинаторных задач – задач на подсчет различных комбинаций.

1. Принцип суммы

Пусть A и B – конечные множества. Введем обозначение: $\mu(X)$ – число элементов конечного множества X. Отметим также, что по определению пустое множество $\varnothing$ считается конечным: $\mu(\varnothing) = 0$.

Аксиома (*принцип суммы для непересекающихся множеств*). Число элементов объединения непересекающихся множеств A и B равно сумме числа элементов этих множеств:

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B), \quad A \cap B = \varnothing. \qquad (1)$$

Теорема 1. Число элементов объединения $k > 2$ попарно непересекающихся множеств A_i $(i = 1, 2, \ldots ,k)$ равно сумме числа элементов этих множеств:

$$\mu(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k) = \mu(A_1) + \mu(A_2) + \ldots + \mu(A_k) = \sum_{i=1}^{k} \mu(A_i), \qquad (2)$$

где $A_i \cap A_j$ для всех $i \neq j$ $(i, j = 1, 2, \ldots ,k)$.

Справедливость выражения (2) легко доказывается из (1) методом математической индукции.

Введем обозначения: $\mu(A_1) = n_1$, $\mu(A_2) = n_2$, … , $\mu(A_k) = n_k$. Тогда выражение (2) примет вид

$$\mu(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k) = n_1 + n_2 + \ldots + n_k. \qquad (3)$$

***Формулировка принципа суммы* (3) *в терминах последовательных выборов*.** Пусть требуется произвести выбор одного из элементов множеств A_1, A_2, … или A_k, причем для элемента множества A_1 имеется n_1 вариантов выбора; для элемента множества A_2 имеется n_2 вариантов выбора, отличных от первых вариантов, и так далее; для элемента множества A_k имеется n_k вариантов выбора, отличных от всех предыдущих вариантов. Тогда выбор одного из элементов множеств A_1, $A_2, \ldots$ или A_k можно произвести $(n_1 + n_2 + \ldots + n_k)$ способами.

Т е о р е м а 2. Число элементов разности произвольных конечных множеств *A* и *B* определяется выражением

$$\mu(A \setminus B) = \mu(A) - \mu(A \cap B). \qquad (4)$$

З а м е ч а н и е. Пусть в (4) $A = S$, где S – универсальное множество. Тогда по определению $A \setminus B = S \setminus B = \overline{B}$ – дополнение множества *B*, $S \cap B = B$ и из (4) имеем

$$\mu(\overline{B}) = \mu(S) - \mu(B). \qquad (5)$$

Т е о р е м а 3 (*принцип суммы для пересекающихся множеств*). Число элементов объединения произвольных конечных множеств *A* и *B* определяется выражением

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B). \qquad (6)$$

Для объединения трех произвольных конечных множеств *A*, *B* и С легко доказать справедливость выражения, аналогичного выражению (6):

$$\mu(A \cup B \cup C) = \mu(A) + \mu(B) + \mu(C) -$$
$$- \mu(A \cap B) - \mu(A \cap C) - \mu(B \cap C) + \mu(A \cap B \cap C). \qquad (7)$$

П р и м е р 1. Из 15 внешнеторговых экспортно-импортных фирм 10 имеют деловые связи с австрийскими фирмами, 7 – с итальянскими. При этом 6 фирм имеют деловые связи с австрийскими и итальянскими фирмами. Сколько фирм не имеют деловых связей с фирмами Австрии и Италии?

Р е ш е н и е. Пусть *A* – множество фирм, имеющих деловые связи с австрийскими фирмами, *B* – с итальянскими. Тогда $A \cap B$ – множество фирм, имеющих деловые связи с австрийскими и итальянскими фирмами, $A \cup B$ – множество фирм, имеющих деловые связи с фирмами по крайней мере одной из стран: Австрии или Италии, $\overline{A \cup B}$ – множество фирм, не имеющих деловых связей с этими странами. Через *S* обозначим множество всех внешнеторговых экспортно-импортных фирм. Из условий примера

$$\mu(A) = 10, \mu(B) = 7, \mu(A \cap B) = 6, \mu(S) = 15.$$

Руководствуясь принципом суммы (6), получим

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B) = 10 + 7 - 6 = 11.$$

Отсюда

$$\mu(\overline{A \cup B}) = \mu(S) - \mu(A \cup B) = 15 - 11 = 4.$$

2. Принцип произведения

Теорема 4 (*принцип произведения*). Число элементов декартова произведения множеств A и B равно произведению числа элементов этих множеств:

$$\mu(A \times B) = \mu(A) \cdot \mu(B). \tag{8}$$

Методом математической индукции для декартова произведения $k > 2$ множеств A_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$ легко доказать

$$\mu(A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_k) = \mu(A_1) \cdot \mu(A_2) \cdot \ldots \cdot \mu(A_k) = \prod_{i=1}^{k} \mu(A_i) = n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k. \tag{9}$$

***Формулировка принципа произведения* (9) *в терминах последовательных выборов*.** Пусть требуется произвести выбор k раз, причем на 1-м шаге имеется n_1 вариантов выбора; на 2-м шаге – n_2 вариантов выбора и так далее; на k-м шаге – n_k вариантов выбора; и число вариантов выбора на каждом шаге не зависит от того, какие выборы были сделаны на предыдущих шагах. Тогда общее число способов, которыми можно произвести ту или иную последовательность k выборов, равно произведению числа возможных вариантов выбора на каждом из шагов, то есть $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$.

Пример 2. Сколько четырехзначных чисел можно составить, используя цифры 0, 1, 2, 3, 4, в которых

а) никакая цифра не встречается больше одного раза;

б) повторение цифр допустимо.

Решение. а) Так как по условию задачи никакая цифра из множества 0, 1, 2, 3, 4 в четырехзначном числе не должна повторяться, то в соответствии с принципом произведения

на 1-м шаге для выбора цифры, указывающей единицы тысяч, из множества 0, 1, 2, 3, 4 (ноль не может стоять на 1-м месте четырехзначного числа) имеется 4 варианта ($n_1 = 4$);

на 2-м шаге для выбора цифры, указывающей сотни, имеется 4 варианта ($n_2 = 4$);

на 3-м шаге для выбора цифры, указывающей десятки, – 3 варианта ($n_3 = 3$);

на 4-м шаге для выбора цифры, указывающей единицы, – 2 варианта ($n_4 = 2$).

Отсюда по принципу произведения (9) получаем, что количество четырехзначных чисел, которые можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, 4, не повторяя их, равно

$$n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot n_4 = 4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 96.$$

б) Если же повторение цифр допустимо, то, рассуждая аналогично, по принципу произведения имеем на 1-м шаге $n_1 = 4$; на 2-м – $n_2 = 5$; на 3-м – $n_3 = 5$; на 4-м – $n_4 = 5$. Таким образом, количество четырехзначных чисел, которые можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, 4, равно

$$n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot n_4 = 4 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 500.$$

3. Сочетания. Размещения и перестановки

Конечное множество, содержащее n элементов, будем называть n-множеством, а множество, содержащее m элементов и являющееся подмножеством n-множества, назовем m-подмножеством n-множества ($m \le n$).

Определение 1. Сочетанием из n элементов по m элементов называется произвольное (неупорядоченное) m-подмножество n-множества.

Пример 3. Для множества $\{5, 6, 7\}$ записать всевозможные сочетания из трех по два.

Решение. Следуя определению 1, запишем все подмножества заданного множества, содержащие два элемента:

$$\{5, 6\}, \{5, 7\}, \{6, 7\}. \qquad (10)$$

Подчеркнем, что, например, множества или, другими словами, сочетания $\{5, 6\}$ и $\{6, 5\}$ равны.

Определение 2. Размещением из n элементов по m элементов называется всякое упорядоченное m-подмножество n-множества.

Пример 4. Для множества $\{5, 6, 7\}$ записать всевозможные размещения из трех по два.

Р е ш е н и е. Следуя определению 2, запишем все сочетания (10) из трех по два, а затем поменяем в них порядок следования элементов:

$\{5,6\}$, $\{5,7\}$, $\{6,7\}$, $\{6,5\}$, $\{7,5\}$, $\{7,6\}$.

Еще раз отметим, что, например, $\{5,6\}$ и $\{6,5\}$ – одинаковые сочетания, но различные размещения.

О п р е д е л е н и е 3. Если $m=n$, то размещения называются перестановками из n элементов.

П р и м е р 5. Для множества $\{5,6,7\}$ записать всевозможные перестановки из трех.

Р е ш е н и е. Согласно определению 3, во множестве $\{5,6,7\}$ всеми способами поменяем порядок следования элементов:

$\{5,6,7\}$, $\{6,7,5\}$, $\{7,5,6\}$, $\{5,7,6\}$, $\{6,5,7\}$, $\{7,6,5\}$.

З а м е ч а н и е. Произведение n первых чисел натурального ряда, т.е. $n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1$ обозначают $n!$ (читается эн-факториал), при этом по определению полагают $0! = 1$.

Приведем примеры:

$1! = 1$,	$6!=6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=720$,
$2!=2\cdot1=2$,	$7!=7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=5040$,
$3!=3\cdot2\cdot1=6$,	$8!=8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=40320$,
$4!=4\cdot3\cdot2\cdot1=24$,	$9!=9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=362880$,
$5!=5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=120$,	$10!=10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=3628800$.

Легко также видеть

$$n!=n\,(n-1)!=n\,(n-1)\,(n-2)!=n\,(n-1)\,(n-2)\ldots(n-m)!,\quad 0\le m\le n.$$

Т е о р е м а 5. Число всех размещений из n элементов по m элементов, обозначаемое символом A_n^m, находится по формуле

$$\mathrm{A}_n^m=\frac{n!}{(n-m)!}. \qquad (10)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В соответствии с принципом произведения

на 1-м шаге для выбора первого элемента размещения имеется n вариантов;

на 2-м шаге для выбора второго элемента размещения имеется

$(n-1)$ вариантов;

на 3-м шаге для выбора третьего элемента размещения имеется $(n-2)$ вариантов и так далее;

на m-м шаге для выбора m-го элемента размещения имеется $(n-m+1)$ вариантов.

Таким образом количество всех размещений из n элементов по m элементов равно

$$\mathrm{A}_n^m = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-m+1) =$$

$$= \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-m+1)\cdot(n-m+1)\cdot(n-m)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1}{(n-m+1)\cdot(n-m)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1} = \frac{n!}{(n-m)!}$$

Следствие. В формуле (10) положим $m=n$:

$$\mathrm{A}_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = \frac{n!}{1} = n!,$$

и получим формулу для числа всех перестановок из n элементов, обозначаемого символом P_n:

$$\mathrm{P}_n = n!. \qquad (11)$$

Пример 6. Из цифр 1, 2, ... , 9 требуется составить три числа: два двузначных и одно трехзначное. Сколько таких троек чисел можно составить так, чтобы ни одна из цифр 1, 2, ... , 9 не встречалась в каждой из этих троек более одного раза.

Решение. Руководствуясь принципом произведения, на 1-м шаге составляем первое двузначное число из девяти цифр. Количество таких чисел равно числу всех размещений из 9-ти элементов по 2 элемента: A_9^2.

На 2-м шаге составляем второе двузначное число, но уже не из девяти, а из семи цифр (две цифры уже использованы при составлении первого числа и по условию примера они не должны повторяться). Их количество равно A_7^2.

На 3-м шаге составляем трехзначное число из пяти цифр (из девяти цифр четыре уже использованы при составлении двух двузначных чисел). Количество этих чисел равно A_5^3.

Отсюда для искомого количества троек чисел имеем

$$A_9^2 \cdot A_7^2 \cdot A_5^3 = \frac{9!}{(9-2)!} \cdot \frac{7!}{(7-2)!} \cdot \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{9!}{7!} \cdot \frac{7!}{5!} \cdot \frac{5!}{2!} = \frac{9!}{2!} =$$

$$= 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 181440.$$

Эту задачу можно решить проще, если сообразить, что искомое число рассматриваемых троек чисел равно числу всевозможных семизначных чисел, составленных из цифр 1, 2, ..., 9, в которых никакая цифра не встречается больше одного раза, т.е. числу всевозможных перестановок из 9-ти элементов по 7 элементов:

$$A_9^7 = \frac{9!}{(9-7)!} = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 181440.$$

А можно по-другому, не используя формулу (10), руководствуясь принципом произведения, использованного при выводе формулы (10), сразу записать $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2$, то есть

на 1-м шаге для выбора цифры, указывающей единицы миллионов семизначного числа, из множества 1, 2, ..., 9 имеется 9 вариантов ($n_1 = 9$);

на 2-м шаге для выбора цифры, указывающей сотни тысяч, имеется 8 вариантов ($n_2 = 8$)

и так далее (см. решение примера 2а).

П р и м е р 7. Сколькими способами можно рассадить в ряд 6 человек, если:

а) три определенных человека должны сидеть рядом;

б) три определенных человека не должны сидеть рядом (т.е. по крайней мере один из них не сидит рядом с двумя другими).

Р е ш е н и е. а) Три человека A, B и C, которые должны сидеть рядом, рассмотрим как один элемент ABC. Таким образом, получим множество из четырех элементов. Из них можно составить 4! перестановок. Учтем также, что в каждой из таких перестановок можно. в свою очередь, сделать 3! перестановок элементов тройки ABC. Отсюда, руководствуясь принципом суммы (случай попарно не пересекающихся множеств), для числа способов, которыми можно рассадить в ряд 6 человек так, чтобы три определенных человека сидели рядом, имеем

$$4! \cdot 3! = 4 \cdot (3!)^2 = 4 \cdot (3 \cdot 2)^2 = 144.$$

б) Если не налагать никаких условий, то 6 человек можно рассадить в ряд 6! способами. Выше было получено, что если три определенных человека должны сидеть рядом, то число способов, которыми можно рассадить в ряд 6 человек, равно $4!\cdot 3!$. Пусть S – множество всех перестановок из 6-ти, A –множество всех перестановок из 6-ти, в которых три определенных человека сидят рядом. Тогда

$$\mu(S)=6!,\quad \mu(A)=4!\cdot 3!\ .$$

Очевидно, что $\overline{A}$ есть множество всех перестановок из 6-ти, в которых три определенных человека не сидят рядом и

$$\mu(\overline{A})=\mu(S)-\mu(A)=6!-4!\cdot 3!=4!\cdot(6\cdot 5-6)=576.$$

Итак, число способов, при которых три определенных человека не должны сидеть рядом, равно 576.

Теорема 6. Число всех сочетанием из n элементов по m элементов, обозначаемое символом C_n^m, находится по формуле

$$C_n^m=\frac{n!}{m!\,(n-m)!}. \tag{12}$$

Доказательство. Так как из каждого сочетания из n элементов по m элементов можно получить $m!$ размещений из n по m , то количество сочетаний в $m!$ раз меньше,чем размещений:

$$C_n^m=\frac{A_n^m}{m!}=\frac{n!}{m!\,(n-m)!}.$$

Замечание. Для вычисления числа сочетаний из n элементов по m полезны следующие легко получаемые соотношения:

$$C_n^m=C_n^{n-m}. \tag{13}$$

$$C_n^n=C_n^0=1,\qquad C_n^{n-1}=C_n^1=n; \tag{14}$$

$$C_{n+1}^{m+1}=C_n^{m+1}+C_n^m\quad (m<n). \tag{15}$$

Пример 8. Сколькими способами читатель может отобрать три книги из четырех, если порядок книг его не интересует.

Решение. В рассматриваемом примере порядок книг читателя не интересует и число способов, которыми он может отобрать три книги из четырех, равно числу сочетаний из 4-х элементов по 3:

$$C_4^3 = C_4^1 = 4.$$

П р и м е р 9 . Сколько комитетов в составе 6-ти человек может быть образовано, если от первого факультета имеется 7 кандидатур, а от второго –8, причем в комитет должно быть включено не менее 2-х представителей от каждого факультета.

Р е ш е н и е . Возможны следующие типы структур комитета:

тип I: 4 представителя от первого факультета, 2 – от второго;

тип II: 3 представителя от первого факультета, 3 – от второго;

тип III: 2 представителя от первого факультета, 4 – от второго.

Используя принцип произведения, найдем число структур указанных типов:

тип I: $C_7^4 \cdot C_8^2$;

тип II: $C_7^3 \cdot C_8^3$;

тип III: $C_7^2 \cdot C_8^4$.

Руководствуясь принципом суммы и принимая во внимание формулы (13) – (15), для искомого числа комитетов получаем:

$$C_7^4 \cdot C_8^2 + C_7^3 \cdot C_8^3 + C_7^2 \cdot C_8^4 = C_7^3\left(C_8^2 + C_8^3\right) + C_7^2 \cdot C_8^4 =$$

$$= C_7^3 \cdot C_9^3 + C_7^2 \cdot C_8^4 = \frac{7!}{3!\,4!} \cdot \frac{9!}{3!\,6!} + \frac{7!}{2!\,6!} \cdot \frac{8!}{4!\,4!} =$$

$$= \frac{7!\,8!}{2 \cdot 3!\,4!\,6!} \cdot \left(\frac{9}{3} + \frac{1}{4}\right) = 4 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot \frac{13}{4} = 4410.$$

З а д а ч и д л я с а м о с т о я т е л ь н о г о р е ш е н и я

1. Автокомбинат получил заявку от строительной фирмы на 5 тяжёлых грузовиков для работы на стройке. Тяжёлый грузовик можно заменить двумя лёгкими грузовиками. На автокомбинате в настоящий момент имеется 5 свободных тяжёлых грузовиков и 5 свободных лёгких грузовиков. Сколько вариантов составления колонны грузовиков для работы на стройке имеет автокомбинат? (Учесть, что каждая машина закреплена за своим шофёром). Ответ: 101.

2. Сколькими способами можно разложить 7 одинаковых шаров по 4-м ящикам, если в каждый ящик должен попасть хотя бы один шар?

Ответ: 20.

3. Сколькими способами можно разложить 5 разноцветных шаров по 3-м ящикам? Ответ: 243.

4. Директор фирмы составил список из 5-ти человек, которых он может назначить на вакантную должность своего заместителя, и список из 4-х человек, которых он может назначить на вакантную должность главного бухгалтера. В оба списка вошёл сотрудник Иванов. Других пересечений этих списков не оказалось. Сколько вариантов заполнения двух вакантных должностей имеет директор? Ответ: 19.

5. Директор фирмы составил список из 5-ти возможных кандидатов на вакантные должности своих 1-го, 2-го и 3-го заместителей, а также список из 4-х возможных кандидатов на 2 вакантные должности своих помощников. Сколько вариантов заполнения пяти вакантных должностей имеет директор? Ответ: 360.

6. Сколько можно найти вариантов расстановки на полке 10-ти томов собрания сочинений при условии, что первый, пятый и десятый тома не должны образовывать тройку стоящих рядом книг? Ответ: $84 \cdot 8!$

7. У одного человека есть 7 книг, а у другого – 9 книг. Сколькими способами они могут обменять три книги одного на три книги другого?

Ответ: 2940.

Автор: Никитина Н.С.