

Тема: «Предел функции одной переменной»

I. Найти следующие пределы отношения двух многочленов (а также дробей, содержащих иррациональности) путем предварительного деления числителя и знаменателя на x^n , где n – наивысшая степень этих многочленов:

$$\begin{aligned} 1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+1)^2}{x^2+1}; & \quad 2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1000x}{x^2-1}; & \quad 3) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2-5x+1}{3x+7}; \\ 4) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2-x+3}{x^3-8x+5}; & \quad 5) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x+3)^3(3x-2)^2}{x^5+5}; & \quad 6) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2-3x-4}{\sqrt{x^4+1}}; \\ 7) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+3}{x+\sqrt[3]{x}}; & \quad 8) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{10+x\sqrt{x}}; & \quad 9) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x^2+1}}{x+1}; \\ 10) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}. \end{aligned}$$

Ответы: 1) 1; 2) 0; 3) ∞ ; 4) 0; 5) 72; 6) 2; 7) 2; 8) ∞ ; 9) 0; 10) 1.

II. Пределы следующих рациональных дробей при $x \rightarrow a$ найти непосредственно или предварительно сокращая на $x-a$:

$$\begin{aligned} 11) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3+1}{x^2+1}; & \quad 12) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2-5x+10}{x^2-25}; & \quad 13) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2-1}{x^2+3x+2}; \\ 14) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-2x}{x^2-4x+4}; & \quad 15) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}; & \quad 16) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right). \end{aligned}$$

Ответы: 11) 0; 12) ∞ ; 13) -2; 14) ∞ ; 15) $\frac{1}{2}$; 16) -1.

III. Найти пределы от иррациональных выражений путем перевода иррациональности из числителя в знаменатель или, наоборот, из знаменателя в числитель:

$$\begin{aligned} 17) \lim_{x \rightarrow 7} \frac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}; & \quad 18) \lim_{x \rightarrow 8} \frac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2}; & \quad 19) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}; \\ 20) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x+1}{\sqrt[3]{x}+1}; & \quad 21) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{3-\sqrt{5+x}}{1-\sqrt{5-x}}; & \quad 22) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}; \\ 23) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x^2-2x+6}-\sqrt{x^2+2x-6}}{x^2-4x+3}; & \quad 24) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2-5x+6}-x \right); \end{aligned}$$

$$25) \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\sqrt{x^2 + 1} - x \right); \quad 26) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(x + \sqrt[3]{1 - x^3} \right).$$

Ответы: 17) $-\frac{1}{56}$; 18) 12; 19) $\frac{3}{2}$; 20) 3; 21) $-\frac{1}{3}$; 22) 1; 23) $-\frac{1}{3}$;

24) $-\frac{5}{2}$; 25) $\frac{1}{2}$; 26) 0.

IV. При вычислении следующих пределов во многих случаях следует использовать формулу $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$:

$$27) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin x}{x}; \quad 28) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x}; \quad 29) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x};$$

$$30) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\sin 2x}; \quad 31) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin \pi x}{\sin 3\pi x}; \quad 32) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(x \sin \frac{\pi}{x} \right);$$

$$33) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}; \quad 34) \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a}; \quad 35) \lim_{x \rightarrow a} \frac{\cos x - \cos a}{x - a}.$$

Ответы: 27) $\frac{1}{2} \sin 2$; 28) 0; 29) 3; 30) $\frac{5}{2}$; 31) $\frac{1}{3}$; 32) π ; 33) $\frac{1}{2}$;

34) $\cos a$; 35) $-\sin a$.

V. При вычислении следующих пределов во многих случаях следует использовать формулы $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$:

$$36) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2+x}{3-x} \right)^x; \quad 37) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x-1}{x^2-1} \right)^{x+1}; \quad 38) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x^2} \right)^{\frac{2x}{x+1}};$$

$$39) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^2 - 2x + 3}{x^2 - 3x + 2} \right)^{\frac{\sin x}{x}}; \quad 40) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 2}{2x^2 + 1} \right)^{x^2}; \quad 41) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x} \right)^x;$$

$$42) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x} \right)^x; \quad 43) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{x+1} \right)^x; \quad 44) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x+3} \right)^{x+2}.$$

Ответы: 36) 1; 37) $\frac{1}{4}$; 38) 0; 39) $\frac{3}{2}$; 40) 0; 41) e^{-1} ; 42) e^2 ; 43) e^{-1} ;

44) e^{-4} .

VI. Найти следующие односторонние пределы:

$$45) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}};$$

$$46) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}};$$

$$47) \lim_{x \rightarrow -0} \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{x}}};$$

$$48) \lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{\frac{1}{1 + e^x}};$$

$$49) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(1 + e^x)}{x};$$

$$50) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + e^x)}{x};$$

$$51) \lim_{x \rightarrow -0} \frac{|\sin x|}{x};$$

$$52) \lim_{x \rightarrow +0} \frac{|\sin x|}{x};$$

$$53) \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{x-1}{|x-1|};$$

$$54) \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{x-1}{|x-1|};$$

$$55) \lim_{x \rightarrow 2-0} \frac{x}{x-2};$$

$$56) \lim_{x \rightarrow 2+0} \frac{x}{x-2}.$$

Ответы: 45) -1 ; 46) 1 ; 47) 1 ; 48) 0 ; 49) 0 ; 50) 1 ; 51) -1 ; 52) 1 ;
53) -1 ; 54) 1 ; 55) $-\infty$; 56) $+\infty$.

Автор: Никитина Н.С.