Важные понятия, утверждения, формулы и некоторые примеры по высшей алгебре

Тема 1. « **К о м п л е к с н ы е ч и с л а** »

1. Записать заданное комплексное число в алгебраической, тригонометрической и показательной форме.

2. Комплексное число z как точка в декартовой системе координат: ось абсцисс *Rez*, ось ординат *Imz*. Модуль комплексного числа $|z|$, аргумент комплексного числа $Arg\,z$.

3. Возведение комплексного числа в степень $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ (формула Муавра).

4. Корень n-й степени из комплексного числа z: $\sqrt[n]{z}$ $(n = 2, 3, \dots)$. В декартовой системе координат изобразить геометрическое место всех значений корня $\sqrt[n]{z}$.

5. Вычислить:

$$(2+i)(3-i)+(2-6i)(3+i), \quad \frac{(2-6i)(3+i)}{(2+i)^2}, \quad \frac{1+4i}{3-2i},$$

$$(3+i)^2, \quad (2-3i)^3, \quad \left(i-\sqrt{3}\right)^{12}, \quad \sqrt[4]{1-i}.$$

6. Вычислить 1) $\sqrt[5]{32i}$, 2) $\sqrt[5]{-32}$.

Выражение для значений корня представить в показательной форме (не вычислять)

В прямоугольной системе координат (ось абсцисс: *Rez*, ось ординат: *Imz*) изобразить геометрическое место всех значений корня.

Тема 2. « **М н о г о ч л е н ы** »

1. Определение рациональной дроби. Правильная дробь, простейшая дробь. Неприводимые многочлены с вещественными коэффициентами (или неприводимые многочлены над полем вещественных чисел).

2. Представление многочлена с вещественными коэффициентами в виде произведения степеней неприводимых многочленов.

3. Разделить с остатком многочлен $f(x)$ на многочлен $g(x)$ и представить многочлен $f(x)$ в виде $f(x)=q(x)g(x)+r(x)$, где степень многочлена $r(x)$ меньше степени многочлена $g(x)$, если

$$f(x) = x^4+3x^3-x^2-4x-3, \quad g(x) = 3x^3+10x^2+2x-3.$$

Записать многочлены $q(x)$ и $r(x)$.

4. Руководствуясь алгоритмом последовательного деления (алгоритм Евклида) найти наибольший общий делитель $d(x)$ многочленов

$$f(x) = 3x^3 + 10x^2 + 2x - 3, \quad g(x) = x^4 + 3x^3 - x^2 - 4x - 3.$$

5. Представить следующие рациональные дроби в виде суммы простейших дробей:

$$q(x) = \frac{x}{(x-1)(x^2+1)^2}$$

(*указание*: неопределенные коэффициенты вычислить);

$$f(x) = \frac{7x^5 + 2x^3 - x + 8}{(x^4-1)(x-3)(x+6)^3(x^2+x+1)(x^2-2x+5)^4}$$

(*указание*: неопределенные коэффициенты не вычислять).

6. Записать формулы Виета для коэффициентов многочлена $f(x) = x^4 + a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a_4$, если известно, что этот многочлен имеет двойной корень (-3) и простые корни $1 \pm i$. Записать этот многочлен.

Тема 3. **« М а т р и ц ы »**

1. Вычислить произведения матриц или заданный элемент этих произведений, например c_{12}:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -7 & 11 \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}; \qquad \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 3 & -2 & 5 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 7 \end{pmatrix}; \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 7 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 3 & 7 & -2 \end{pmatrix}.$$

2. Вычислить определители матриц: $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 7 & -11 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

3. Указать ранг матрицы $\begin{pmatrix} -9 & 6 & 7 & 10 \\ -6 & 4 & 2 & 3 \\ -3 & 2 & -11 & -15 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; вычислить алгебраическое дополнение ее элемента c_{24}.

4. Для матриц $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -7 & 11 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ найти обратные матрицы или заданные элементы этих обратных матриц, например c_{21}.

5. *Свойства определителей* (*теоремы*).

$$\det A^T = \det A;\ \det(AB) = \det A \det B;\ \det A^{-1} = \frac{1}{\det A}\ (\det A \neq 0);$$

$\det(\alpha A) = \alpha^n \det A$ (A – матрица n-го порядка).

Определитель треугольной матрицы равен произведению элементов главной диагонали.

Определитель матрицы, имеющей два пропорциональных столбца (две пропорциональные строки), равен нулю.

Определитель матрицы, имеющей нулевой столбец (нулевую строку), равен нулю.

Если в матрице A поменять местами любые два столбца (две строки) и полученную матрицу обозначить через B, то $\det B = -\det A$.

Если в матрице A один из столбцов (одну из строк) умножить на какое-либо число α и полученную матрицу обозначить через B, то $\det B = \alpha \det A$.

Если в матрице A один из столбцов заменить на сумму этого столбца и любого другого столбца, умноженного на какое-либо число, и полученную матрицу обозначить через B, то $\det B = \det A$. Аналогичное утверждение верно и для строк.

Пусть $\widetilde{A} = (A_{ij})$ – присоединенная (или взаимная) матрица к матрице A ($i, j = 1, 2, \ldots, n$). Тогда $\det \widetilde{A} = (\det A)^{n-1}$.

6. *Определения*.

Симметрическая матрица $A = (a_{ij})$: $a_{ij} = a_{ji}$, ($i, j = 1, 2, \ldots, n$), т.е. элементы симметричные относительно главной диагонали, равны между собой ($A = A^T$).

Кососимметрическая матрица $A=(a_{ij})$: $a_{ij}=-a_{ji}$, $(i, j = 1, 2, \dots, n)$, т.е. элементы, симметричные относительно главной диагонали, отличаются только знаком, а все элементы главной диагонали равны нулю.

7. *Определение*. *Ортогональная матрица* Q: $Q^T Q = E$ (E – единичная матрица).

Свойства ортогональных матриц (*теоремы*).

$$|\det Q| = 1; \quad Q^T = Q^{-1}; \quad Q^T Q = Q\,Q^T = E.$$

$$q_{i1}^2 + q_{i2}^2 + \dots + q_{in}^2 = \sum_{j=1}^{n} q_{ij}^2 = 1,\ i = 1, 2, \dots, n;$$

$$q_{i1}q_{j1} + q_{i2}q_{j2} + \dots + q_{in}q_{jn} = \sum_{k=1}^{n} q_{ik}q_{jk} = 0$$

для всех $i \neq j$ (аналогичные равенства верны и для столбцов).

Если Q – ортогональная матрица, то матрицы Q^{-1} и Q^T также ортогональны.

Если Q_1 и Q_2 – ортогональные матрицы, то их произведение $Q_1 Q_2$ – ортогональная матрица.

21. Указать, какие из приведенных матриц являются симметрическими, кососимметрическими, ортогональными (ответ обосновать):

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 3 & 7 \\ 2 & 9 & 21 & 41 & -32 \\ -1 & 21 & 0 & 5 & 0 \\ 3 & 41 & 5 & 11 & 1 \\ 7 & -32 & 0 & 1 & -5 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} & 0 \\ 2/\sqrt{30} & -1/\sqrt{30} & 5/\sqrt{30} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 12 & -53 & 1 \\ -12 & 0 & -75 & 1 \\ 53 & 75 & 0 & -26 \\ -1 & -1 & 26 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тема 4. «**Линейные пространства. Линейные подпространства**»

1. Определения

1) *геометрических* пространств V_1, V_2, V_3;

2) пространства *вещественных матриц* $R^{m \times n}$ (m строк, n столбцов);

3) *арифметического* (*координатного*) пространства R^n;

4) пространства M_n *многочленов степени не выше* n.

Размерности и естественные базисы этих пространств. Столбцы координат векторов вышеперечисленных линейных пространств в естественном базисе.

2. Линейные подпространства вышеперечисленных линейных пространств, их размерности и базисы, в том числе линейные оболочки.

Определение. *Линейной оболочкой*, заданной конечной совокупностью $\bar{a}_1,\ \bar{a}_2,\ \ldots,\ \bar{a}_k$ векторов линейного пространства L, называется множество всех линейных комбинаций этих векторов:

$$C_1\bar{a}_1 + C_2\bar{a}_1 + \ldots + C_k\bar{a}_k.$$

Совокупность векторов $\bar{a}_1,\ \bar{a}_2,\ \ldots,\ \bar{a}_k$ называют порождающей системой векторов данной линейной оболочки. $L(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_k)$ – обозначение линейной оболочки.

Теоремы. $L(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_k)$ – линейное подпространство линейного пространства L.

Если какой-либо вектор из порождающей системы векторов является линейной комбинацией остальных векторов этой системы, то его можно удалить из порождающей системы, не изменив линейной оболочки.

Пусть в порождающей системе векторов векторы $\bar{a}_{(1)},\ \bar{a}_{(2)},\ \ldots,\ \bar{a}_{(m)}$ линейно независимые ($m \le k$), а остальные векторы являются их линейной комбинацией. Тогда

1) $L(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_k) = L(\bar{a}_{(1)}, \bar{a}_{(2)}, \ldots, \bar{a}_{(m)})$;

2) $dimL(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_k) = m$;

3) $\bar{a}_{(1)},\ \bar{a}_{(2)},\ \ldots,\ \bar{a}_{(m)}$ – базис в $L(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_k)$.

3. Пусть $\bar{a} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 8 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Вектором какого линейного пространства является $\bar{a}$?

Чему равна размерность этого пространства?

Записать естественный базис этого пространства.

Разложить заданный вектор $\bar{a}$ по естественному базису.

Записать столбец координат вектора $\bar{a}$ в естественном базисе.

4. Найти какой-либо базис линейного подпространства многочленов $p(x)$ из пространства M_2 многочленов степени не выше двух, удовлетворяющих условию $p(1) = 0$. Указать размерность рассматриваемого подпро-

странства.

5. Найти какой-либо базис линейного подпространства арифметического пространства R^5 решений системы уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 4x_5 = 0, \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + x_4 + 7x_5 = 0,. \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 8x_4 + 2x_5 = 0. \end{cases}$$

Указать размерность рассматриваемого подпространства. (См. теорему Кронекера-Капелли.)

6. В некотором базисе четырехмерного линейного пространства векторы $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, $\bar{a}_3$ заданы своими координатами:

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \\ 10 \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \\ 11 \end{pmatrix}, \quad a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Найти какой-либо базис линейной оболочки $L(\bar{a}_1,\ \bar{a}_2,\ \bar{a}_3)$. Указать ее размерность. Ответ обосновать.

7. Пусть $T_{e\to f} = T$ – матрица перехода от базиса $e = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n\}$ к базису $f = \{\bar{f}_1, \bar{f}_2, \ldots, \bar{f}_n\}$ линейного пространства L_n, то есть $f = eT$; $T_{f\to e}$ – матрица обратного перехода от базиса f к базису e. Тогда $T_{f\to e} = T^{-1}_{e\to f} = T^{-1}$.

8. Пусть a_e – столбец координат вектора $\bar{a}$ линейного пространства L_n в базисе e; a_f – столбец координат вектора $\bar{a}$ в базисе f. Тогда $a_f = T^{-1} a_e$.

Тема 5. **« Л и н е й н ы е о п е р а т о р ы »**

1. *Действия над линейными операторами (определения)*. Для любого вектора $\bar{a}$ линейного пространства L:

$(\hat{A} + \hat{B})\bar{a} = \hat{A}\bar{a} + \hat{B}\bar{a}$ (сумма линейных операторов $\hat{A}$ и $\hat{B}$);

$(\lambda \hat{A})\bar{a} = \lambda(\hat{A}\bar{a})$ (произведение линейного оператора $\hat{A}$ на число λ);

$(\hat{A}\hat{B})\bar{a} = \hat{A}(\hat{B}\bar{a})$ (произведение или суперпозиция линейных операторов $\hat{A}$ и $\hat{B}$).

2. *Определения.*

Тождественный оператор $\hat{E}$: $\hat{E}\,\bar{a} = \bar{a}$ для любого вектора $\bar{a}$ линейного пространства L.

Оператор $\hat{A}^{-1}$ *обратный* к оператору $\hat{A}$: $\hat{A}\hat{A}^{-1} = \hat{A}^{-1}\hat{A} = \hat{E}$.

3. *Теорема.* Пусть A_e – матрица линейного оператора $\hat{A}$ в базисе $e = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n\}$; A_f – матрица линейного оператора $\hat{A}$ в базисе $f = \{\bar{f}_1, \bar{f}_2, \ldots, \bar{f}_n\}$. Тогда $A_f = T^{-1} A_e\, T$ или $A_f = T_{f\to e}\, A_e\, T_{e\to f}$.

4. *Определение.* $\hat{A}\bar{b} = \lambda \bar{b}$, $\bar{b} \neq \bar{0}$ $(\bar{b} \in L_n,\ \lambda \in R)$; $\bar{b}$ - собственный вектор линейного оператора $\hat{A}$, принадлежащий собственному значению λ.

5. *Теорема.* Собственные векторы линейного оператора, относящиеся к различным собственным значениям, составляют линейно независимую систему.

6. Пусть $\hat{A}$ – линейный оператор, действующий в линейном пространстве $R^{2\times 2}$ матриц второго порядка: $\hat{A}X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} X$ для любых элементов $X \in R^{2\times 2}$. Найти матрицу оператора $\hat{A}$ в базисе из матричных единиц:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

7. Найти матрицу дифференциального оператора $\hat{D}f(x) = \dfrac{d\,f(x)}{dx}$, действующего в линейном пространстве M_3 многочленов степени не выше трех в базисе 1, x, x^2, x^3. Найти собственные значения и собственные векторы этого оператора.

8. Пусть $\hat{A}$ и $\hat{B}$ – линейные операторы, действующие в трехмерном линейном пространстве L_3. В некотором базисе этого пространства векторы $\bar{x}$, $\hat{A}\bar{x}$, $\hat{B}\bar{x} \in L_3$ имеют соответственно координаты:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},\quad Ax = \begin{pmatrix} x_1 \\ 2x_2 \\ 3x_3 \end{pmatrix},\quad Bx = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ x_1 + x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},.$$

Записать столбец координат вектора $(2\hat{A} - \hat{B}^2)\bar{x}$ в рассматриваемом базисе.

9. Пусть $\hat{A}$ – линейный оператор, действующий в линейном пространстве $R^{2\times 2}$ матриц второго порядка; $\bar{a} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ – собственный вектор этого оператора, принадлежащий собственному значению $\lambda = -7$. Чему равен вектор $\hat{A}\bar{a}$?

10. Линейный оператор $\hat{A}$, действующий в трехмерном линейном пространстве, в некотором базисе этого пространства задан следующей матрицей: $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$. В рассматриваемом базисе найти координаты собственного базиса $\bar{b}_1$, $\bar{b}_2$, $\bar{b}_3$ оператора $\hat{A}$. Записать матрицу A_b оператора $\hat{A}$ в собственном базисе. Записать столбцы b_1, b_2, b_3 координат векторов $\bar{b}_1$, $\bar{b}_2$, $\bar{b}_3$.

Тема 6. « **Евклидовы пространства. Ортогональные и симметрические операторы** »

1. Скалярное произведение векторов, заданных координатами в ортонормированном базисе евклидова пространства.

2. Найти скалярное произведение для элементов $\bar{f} = 2x - x^2$ и $\bar{g} = 1 + x$ евклидова пространства M_2 многочленов степени не выше двух со скалярным произведением, определяемым по формуле:

$$1)\ (\bar{f}, \bar{g}) = \int_0^1 f(x) g(x) dx; \qquad 2)\ (\bar{f}, \bar{g}) = \int_{-1}^1 f(x) g(x) dx;$$

$$3)\ (\bar{f}, \bar{g}) = f(-1)g(-1) + f(0)g(0) + f(1)g(1).$$

3. Ортонормировать систему линейно независимых векторов $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, $\bar{a}_3$ евклидова пространства, заданных своими координатами в некотором ортонормированном базисе:

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad a_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad a_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

Процесс ортогонализации начать с вектора $\bar{a}_1$. Записать столбцы b_1, b_2, b_3 координат ортонормированных векторов. <u>Готовые формулы для ортогональных векторов не использовать</u>!

4. *Теорема*. Всякая ортогональная система ненулевых векторов линейно независима.

5. *Определения*. Для любых векторов евклидова пространства $\overline{a}$, $\overline{b}$

ортогональный линейный оператор $\hat{Q}$: $(\hat{Q}\overline{a}, \hat{Q}\overline{b}) = (\overline{a}, \overline{b})$;

симметрический (*самосопряженный*) линейный оператор $\hat{A}$: $(\hat{A}\overline{a}, \overline{b}) = (\overline{a}, \hat{A}\overline{b})$.

6. *Теорема*. В любом ортонормированном базисе евклидова пространства матрица Q ортогонального оператора $\hat{Q}$ является ортогональной: $Q^T = Q^{-1}$.

7. *Теоремы*.

В любом ортонормированном базисе евклидова пространства матрица A симметрического оператора $\hat{A}$ является симметрической: $A = A^T$.

Собственные векторы симметрического оператора, соответствующие различным собственным значениям, ортогональны между собой.

Тема 7. **« К в а д р а т и ч н ы е   ф о р м ы »**

1. Методом выделения полных квадратов (метод Лагранжа) представить квадратичную форму $F(x_1, x_2, x_3) = 2x_1x_2 - 6x_2x_3 + 2x_1x_3$ в нормальном виде $\Phi(u_1, u_2, u_3)$. Записать $\Phi(u_1, u_2, u_3)$. Указать матрицу Q линейного преобразования переменных. Записать выражения переменных x_i $(i = 1, 2, 3)$ через переменные u_j $(j = 1, 2, 3)$.

Определение: $X = QU$, где $X = (x_1, x_2, x_3)^T$, $U = (u_1, u_2, u_3)^T$.

2. Положительно определенные, отрицательно определенные, неопределенные квадратичные формы. Главные (угловые) миноры квадратичной формы.

3. *Теорема* (критерий Сильвестра). Квадратичная форма $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ тогда и только тогда

а) положительно определенная, если $D_k > 0$, $k = 1, 2, \ldots, n$;

б) отрицательно определенная, если $(-1)^k D_k > 0$, $k = 1, 2, \ldots, n$,

где $D_1, D_2, \ldots, D_n$ – угловые миноры квадратичной формы .

4. Руководствуясь критерием Сильвестра, установить, являются ли квадратичные формы, заданные следующими матрицами, положительно определенными, отрицательно определенными или неопределенными:

$$1)\begin{pmatrix} 5 & 2 & -4 \\ 2 & 1 & -2 \\ -4 & -2 & 5 \end{pmatrix}; \qquad 2)\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -15 & 3 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}; \qquad 3)\begin{pmatrix} -11 & 6 & -6 \\ 6 & -6 & 3 \\ -6 & 3 & -6 \end{pmatrix}.$$

Указать значения угловых миноров, необходимые для обоснования ответа.

5. *Теоремы*.

Для любой квадратичной формы $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ с матрицей A_F существует ортогональное преобразование Q, приводящее эту форму к каноническому виду $\varPhi(y_1, y_2, \ldots, y_n)$, коэффициенты которого есть характеристические корни (собственные значения) симметрического оператора $\hat{A}$, имеющего в некотором ортонормированном базисе евклидова пространства $\mathcal{E}_n$ матрицу, равную матрице A_F, взятые с их кратностями. Другими словами, матрица $A_\varPhi$ квадратичной формы $\varPhi(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ есть диагональная матрица, диагональные элементы которой есть характеристические корни оператора $\hat{A}$, взятые с их кратностями.

Столбцы матрицы ортогонального преобразования Q есть векторы ортонормированного собственного базиса оператора $\hat{A}$.

$$A_\varPhi = Q^T A_F Q = Q^{-1} A_F Q;$$

$X = QY$, где $X = (x_1\, x_2\, \ldots\, x_n)^T$, $Y = (y_1\, y_2\, \ldots\, y_n)^T$).

6. В евклидовом пространстве с ортонормированным базисом ортогональным преобразованием привести квадратичную форму

$$F(x_1, x_2, x_3) = 3x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_2x_3$$

к каноническому виду $\varPhi(y_1, y_2, y_3)$. Записать $\varPhi(y_1, y_2, y_3)$. Указать матрицу Q ортогонального преобразования переменных.

При выборе учебной литературы по линейной алгебре будьте внимательны!!!

Использовать только те книги, в которых

1)матрица перехода $T_{e\to f}=T$ от базиса $e=\{\bar{e}_1,\bar{e}_2,\ldots,\bar{e}_n\}$ к базису $f=\{\bar{f}_1,\bar{f}_2,\ldots,\bar{f}_n\}$ линейного пространства L_n и

2) матрица A_e линейного преобразования (линейного оператора) $\hat{A}$ линейного пространства L_n

определены следующим образом.

<u>*Определение*</u> матрицы $T_{e\to f}=T$:

$$\begin{aligned}
\bar{f}_1&=\tau_{11}\bar{e}_1+\tau_{21}\bar{e}_2+\ldots+\tau_{n1}\bar{e}_n,\\
\bar{f}_2&=\tau_{12}\bar{e}_1+\tau_{22}\bar{e}_2+\ldots+\tau_{n2}\bar{e}_n,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\bar{f}_n&=\tau_{1n}\bar{e}_1+\tau_{2n}\bar{e}_2+\ldots+\tau_{nn}\bar{e}_n,
\end{aligned}
\qquad
T_{e\to f}=T=\begin{pmatrix}\tau_{11}&\tau_{12}&\cdots&\tau_{1n}\\ \tau_{21}&\tau_{22}&\cdots&\tau_{2n}\\ \cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\ \tau_{n1}&\tau_{n2}&\cdots&\tau_{nn}\end{pmatrix};$$

<u>*Определение*</u> матрицы A_e линейного оператора $\hat{A}$ в базисе e:

$$\begin{aligned}
\hat{A}\bar{e}_1&=a_{11}\bar{e}_1+a_{21}\bar{e}_2+\ldots+a_{n1}\bar{e}_n,\\
\hat{A}\bar{e}_2&=a_{12}\bar{e}_1+a_{22}\bar{e}_2+\ldots+a_{n2}\bar{e}_n,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\hat{A}\bar{e}_n&=a_{1n}\bar{e}_1+a_{2n}\bar{e}_2+\ldots+a_{nn}\bar{e}_n,
\end{aligned}
\qquad
A_e=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\ a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\ \cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\ a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}.$$