Тема: «Однородные линейные дифференциальные уравнения n-го порядка»

Дифференциальное уравнение вида

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0 \qquad (1)$$

называется однородным линейным дифференциальным уравнением n-го порядка.

Как и все дифференциальные уравнения, это уравнение имеет бесконечное множество решений. Последнее является n-мерным линейным пространством[1]. В этом легко убедиться, непосредственно проверив для решений уравнения (1) справедливость всех аксиом в определении линейного пространства. Размерность пространства решений уравнения (1) равна n, то есть совпадает с порядком дифференциального уравнения.

Обозначим через

$$y_1 = y_1(x), \quad y_2 = y_2(x), \quad \ldots, \quad y_n = y_n(x) \qquad (2)$$

решения уравнения (1), составляющие базис рассматриваемого пространства. Совокупность решений (2) называют также фундаментальной системой решений[2]. Если известна фундаментальная система решений (2), то общее решение (или общий интеграл) однородного уравнения (1) есть

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 + \ldots + C_ny_n, \qquad (3)$$

где $C_1, C_2, \ldots, C_n$ – произвольные постоянные[3].

Пример 1. Найти общий интеграл уравнения

$$xy'' + y' = 0. \qquad (4)$$

[1] Точнее является линейным подпространством бесконечномерного пространства действительных функций, определенных на некотором множестве.
[2] Проведите параллель с множеством решений однородной системой линейных алгебраических уравнений.
[3] Все, как обычно: любой вектор линейного пространства однозначно представим в виде линейной комбинации заданных базисных векторов рассматриваемого пространства.

Р е ш е н и е . В прошлом семестре мы решали такие уравнения. Уравнение (4) явно не содержит y и здесь следует положить $y' = z$, $y'' = z'$. Тогда уравнение (4) принимает вид:

$$xz' + z = 0.$$

Отсюда

$$\int \frac{dz}{z} = -\int \frac{dx}{x}, \quad \ln|z| = -\ln|x| + \ln C, \quad z = \frac{C_1}{x}.$$

Возвращаемся к прежней переменной y:

$$y' = \frac{C_1}{x}, \quad y = C_1 \int \frac{dx}{x} = C_1 \ln|x| + C_2.$$

Итак,

$$y = C_1 \ln|x| + C_2, \tag{5}$$

где C_1, C_2 – произвольные постоянные, и есть искомый общий интеграл уравнения (4).

Что имеем? Полученное множество решений (5) является примером двумерного линейного пространства ($x < 0$ или $x > 0$). Один из базисов этого пространства образуют функции

$$y_1 = \ln|x|, \quad y_2 = 1.$$

Фундаментальная система решений (2) однородного уравнения (1) хорошо известна в случае, когда его коэффициенты

$$p_1(x), \quad p_2(x), \quad \ldots, \quad p_n(x)$$

являются постоянными (см. лекции по математическому анализу в 1-м семестре). Напомню, как в этом случае найти фундаментальную систему (см. лекции по математическому анализу в 1-м семестре).

Однородные линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами n-го порядка

Рассмотрим однородное линейное дифференциальное уравнения с постоянными коэффициентами:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = 0 \qquad (6)$$

($a_1, a_2, \ldots, a_n = const$). Фундаментальная система решений y_1, y_2, …, y_n уравнения (6) строится на основе характера корней так называемого характеристического уравнения

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0, \qquad (7)$$

а именно:

1) если α является действительным корнем уравнения (7) кратности m, то ему соответствуют следующие m линейно независимых решений уравнения (6):

$$y_1 = \mathrm{e}^{\alpha x}, \quad y_2 = x\mathrm{e}^{\alpha x}, \quad \ldots, \quad y_m = x^{m-1}\mathrm{e}^{\alpha x}; \qquad (8)$$

2) если $\alpha \pm \beta i$ – пара комплексных корней уравнения (7) кратности m, то ему соответствуют следующие $2m$ линейно независимых решений уравнения (6):

$$y_1 = \mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x, \quad y_2 = \mathrm{e}^{\alpha x}\sin\beta x,$$

$$y_3 = x\mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x, \quad y_4 = x\mathrm{e}^{\alpha x}\sin\beta x,$$

$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

$$y_{2m-1} = x^{m-1}\mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x, \quad y_{2m} = x^{m-1}\mathrm{e}^{\alpha x}\sin\beta x.$$

Пример 2. Найти общий интеграл уравнения

$$y''' - 5y'' - 7y' + 51y = 0. \qquad (9)$$

Решение. Для дифференциального уравнения (9) запишем характеристическое уравнение:

$$\lambda^3 - 5\lambda^2 - 7\lambda + 51 = 0.$$

Найдем его корни:

$$(\lambda+3)\,(\lambda^2-8\lambda+17)=0;$$

$$\lambda_1=-3, \quad \lambda_{2,3}=4\pm i.$$

Таким образом, фундаментальная система решений уравнения (9) есть следующее множество функций:

$$y_1=\mathrm{e}^{-3x}, \quad y_2=\mathrm{e}^{4x}\cos x, \quad y_3=\mathrm{e}^{4x}\sin x. \tag{10}$$

Отсюда для общего интеграла уравнения (9) имеем

$$y=C_1\,\mathrm{e}^{-3x}+C_2\,\mathrm{e}^{4x}\cos x+C_3\,\mathrm{e}^{4x}\sin x, \tag{11}$$

где C_1, C_2, C_3 – произвольные постоянные.

Полученное множество решений (11) является примером трехмерного линейного пространства. Один из базисов этого пространства образуют функции (10).

Примеры для самостоятельного решения

1. По заданным корням характеристического уравнения записать общий интеграл соответствующего однородного линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами:

1) $\lambda_1=1, \quad \lambda_2=2;$

2) $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=1;$

3) $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=10, \ \lambda_5=\lambda_6=\lambda_7=19, \ \lambda_8=\lambda_9=22{,}3;$

4) $\lambda_{1,2}=7\pm 11i;$

5) $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=0{,}1+2{,}9i, \ \lambda_5=\lambda_6=\lambda_7=\lambda_8=0{,}1-2{,}9i;$

6) $\lambda_1=\lambda_2=3, \quad \lambda_3=\lambda_4=\dfrac{3}{7}, \quad \lambda_{5,6}=\dfrac{1}{17}\pm 6i;$

7) $\lambda_1=4, \ \lambda_2=5, \ \lambda_3=\lambda_4=\lambda_5=\dfrac{8+9i}{12}, \ \lambda_6=\lambda_7=\lambda_8=\dfrac{8-9i}{12};$

8) $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\dfrac{2}{3}, \quad \lambda_4=\lambda_5=\dfrac{5+i}{21}, \quad \lambda_6=\lambda_7=\dfrac{5-i}{21};$

9) $\lambda_1=\lambda_2=1+i, \quad \lambda_3=\lambda_4=1-i, \quad \lambda_5=\lambda_6=\lambda_7=3+4i,$

$\lambda_8 = \lambda_9 = \lambda_{10} = 3 - 4i$;

10) $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = \lambda_4 = 2 + 3i$, $\lambda_5 = \lambda_6 = 2 - 3i$;

11) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -1$, $\lambda_4 = \lambda_5 = 2 + \frac{i}{2}$, $\lambda_6 = \lambda_7 = 2 - \frac{i}{2}$.

Ответы: 1) $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$;

2) $y = e^x (C_1 + C_2 x + C_3 x^2)$;

3) $y = e^{10x}(C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 x^3) + e^{19x}(C_5 + C_6 x + C_7 x^2) + e^{22,3x}(C_8 + C_9 x)$;

4) $y = e^{7x}(C_1 \cos 11x + C_2 \sin 11x)$;

5) $y = e^{0,1x}(C_1 \cos 2{,}9x + C_1 \sin 2{,}9x) + x e^{0,1x}(C_1 \cos 2{,}9x + C_1 \sin 2{,}9x) + x^2 e^{0,1x}(C_1 \cos 2{,}9x + C_1 \sin 2{,}9x) + x^3 e^{0,1x}(C_1 \cos 2{,}9x + C_1 \sin 2{,}9x)$;

6) $y = e^{3x}(C_1 + C_2 x) + e^{3x/7}(C_3 + C_4 x) + e^{x/17}(C_5 \cos 6x + C_6 \sin 6x)$;

7) $y = C_1 e^{4x} + C_2 e^{5x} + e^{2x/3}\left(C_3 \cos\frac{3x}{4} + C_4 \sin\frac{3x}{4}\right) + x e^{2x/3}\left(C_3 \cos\frac{3x}{4} + C_4 \sin\frac{3x}{4}\right) + x^2 e^{2x/3}\left(C_3 \cos\frac{3x}{4} + C_4 \sin\frac{3x}{4}\right)$;

8) $y = e^{2x/3}(C_1 + C_2 x + C_3 x^2) + e^{5x/21}\left(C_4 \cos\frac{x}{21} + C_5 \sin\frac{x}{21}\right) + x e^{5x/21}\left(C_6 \cos\frac{x}{21} + C_7 \sin\frac{x}{21}\right)$;

9) $y = e^x (C_1 \cos x + C_2 \sin x) + x e^x (C_3 \cos x + C_4 \sin x) + e^{3x}(C_5 \cos 4x + C_6 \sin 4x) + x e^{3x}(C_7 \cos 4x + C_8 \sin 4x) + x^2 e^{3x}(C_9 \cos 4x + C_{10} \sin 4x)$;

10) $y = C_1 + C_2 x + e^{2x}\left(C_3 \cos 3x + C_4 \sin 3x\right) +$
$$+ x e^{2x}\left(C_5 \cos 3x + C_6 \sin 3x\right);$$

11) $y = e^{-x}(C_1 + C_2 x + C_3 x^2) + e^{2x}\left(C_4 \cos\dfrac{x}{2} + C_5 \sin\dfrac{x}{2}\right) +$
$$+ x e^{2x}\left(C_6 \cos\frac{x}{2} + C_7 \sin\frac{x}{2}\right).$$

2. Записать однородное линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами, соответствующее заданному характеристическому уравнению:

1) $3\lambda^2 + \lambda - 5 = 0$;
2) $\lambda^7 + 4\lambda^5 = 0$;
3) $5\lambda^5 + 6\lambda^4 - 11\lambda^3 - 27\lambda^2 + \lambda + 18 = 0$;
4) $\lambda(\lambda + 2)(\lambda - 6) = 0$;
5) $(\lambda - 14)(2\lambda - 1)(\lambda^2 + 1) = 0$;
6) $\lambda^4 = 0$.

Ответы: 1) $3y'' + y' - 5y = 0$; 2) $y^{(7)} + 4y^{(5)} = 0$;
3) $5y^{(5)} + 6y^{\mathrm{IV}} - 11y''' - 27y'' + y' + 18y = 0$;
4) $y''' - 4y'' - 12y' = 0$;
5) $2y^{\mathrm{IV}} - 29y''' + 16y'' - 29y' + 14y = 0$; 6) $y^{\mathrm{IV}} = 0$.

3. Записать однородное линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами по заданной фундаментальной системе ее решений:

1) $y_1 = \mathrm{e}^{2x}$, $y_2 = \mathrm{e}^{3x}$;
2) $y_1 = \cos 4x$, $y_2 = \sin 4x$;
3) $y_1 = 1$, $y_2 = x$, $y_3 = x^2$;
4) $y_1 = \mathrm{e}^{x}$, $y_2 = \mathrm{e}^{x}\cos x$, $y_3 = \mathrm{e}^{x}\sin x$;
5) $y_1 = \mathrm{e}^{8x}\cos 5x$, $y_2 = \mathrm{e}^{8x}\sin 5x$;
6) $y_1 = \mathrm{e}^{0,7x}$, $y_2 = x\,\mathrm{e}^{0,7x}$;
7) $y_1 = \mathrm{e}^{5x}$, $y_2 = x\,\mathrm{e}^{5x}$, $y_3 = x^2\,\mathrm{e}^{5x}$, $y_4 = x^3\,\mathrm{e}^{5x}$.

Ответы: 1) $y'' - 5y' + 6y = 0$; 2) $y'' + 16y = 0$;

3) $y''' = 0;$ 4) $y''' - 3y'' + 4y' - 2y = 0;$

5) $y'' - 16y' + 89y = 0;$ 6) $y'' - 1{,}4y' + 0{,}49y = 0;$

7) $y^{\mathrm{IV}} - 20y''' + 150y'' - 500y' + 625y = 0.$

4. Решить следующие однородные линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами. Указать (а) общий интеграл уравнения; (б) размерность (*dim*) и какой-либо базис линейного пространства решений заданного однородного линейного дифференциального уравнения:

1) $y'' + y' - 2y = 0;$ 2) $y'' + y = 0;$

3) $4y'' - 8y' + 5y = 0;$ 4) $3y'' - 2y' - 8y = 0;$

5) $y''' - 13y'' + 12y' = 0;$ 6) $y^{\mathrm{IV}} + 4y = 0;$

7) $y'' - 9y = 0;$ 8) $y'' - 2y' + y = 0;$

9) $y^{\mathrm{IV}} - 2y' = 0;$ 10) $y^{(5)} - 2y''' + y' = 0;$

11) $y^{\mathrm{IV}} + 2y''' + y'' = 0;$ 12) $y^{(6)} + 18y^{\mathrm{IV}} + 81y'' = 0.$

Ответы:

1) (а) $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{x};$ (б) $dim = 2;$ e^{-2x}, $e^{x};$

2) (а) $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x;$ (б) $dim = 2;$ $\cos x$, $\sin x;$

3) (а) $y = e^{x}\left(C_1 \cos\frac{x}{2} + C_2 \sin\frac{x}{2}\right);$

(б) $dim = 2;$ $e^{x}\cos\frac{x}{2}$, $e^{x}\sin\frac{x}{2};$

4) (а) $y = C_1 e^{-4x/3} + C_2 e^{2x};$ (б) $dim = 2;$ $e^{-4x/3}$, $e^{2x};$

5) (а) $y = C_1 + C_2 e^{x} + C_3 e^{12x};$ (б) $dim = 2;$ 1, e^{x}, $e^{12x};$

6) (а) $y = e^{-x}\left(C_1 \cos x + C_2 \sin x\right) + e^{x}\left(C_3 \cos x + C_4 \sin x\right);$

(б) $dim = 4;$ $e^{-x}\cos x$, $e^{-x}\sin x$, $e^{x}\cos x$, $e^{x}\sin x;$

7) (а) $y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{3x}$; (б) $dim = 2$; e^{-3x}, e^{3x};

8) (а) $y = e^{x}(C_1 + C_2 x)$; (б) $dim = 2$; e^{x}, xe^{x};

9) (а) $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x$;

(б) $dim = 4$; e^{-x}, e^{x}, $\cos x$, $\sin x$;

10) (а) $y = C_1 + e^{-x}(C_2 + C_3 x) + e^{x}(C_4 + C_5 x)$;

(б) $dim = 5$; 1, e^{-x}, xe^{-x}, e^{x}, xe^{x};

11) (а) $y = C_1 + C_2 x + e^{-x}(C_3 + C_4 x)$;

(б) $dim = 4$; 1, x, e^{-x}, xe^{-x};

12) (а) $y = C_1 + C_2 x + C_3 \cos 3x + C_4 \sin 3x +$

$+ x(C_5 \cos 3x + C_6 \sin 3x)$;

(б) $dim = 6$; 1, x, $\cos 3x$, $\sin 3x$, $x\cos x$, $x\sin x$.

5. Решить следующие однородные линейные дифференциальные уравнения с переменными коэффициентами:

1) $y'' - \dfrac{y'}{x} = 0$; 2) $y'' - 2\operatorname{ctg} x\, y' = 0$;

3) $(1 + x^2)y'' - 2xy' = 0$; 4) $(x+1)y'' - (x+2)y' = 0$;

5) $(1 + \ln x)y'' - \dfrac{y'}{x} = 0$; 6) $xy''' + y'' = 0$;

7) $xy^{\mathrm{IV}} - y''' = 0$.

Ответы:

1) (а) $y = C_1 x^2 + C_2$; (б) $dim = 2$; 1, x^2;

2) (а) $y = C_1(2x - \sin 2x) + C_2$; (б) $dim = 2$; 1, $2x - \sin 2x$;

3) (а) $y = C_1 x(x^2 + 3) + C_2$; (б) $dim = 2$; 1, $x(x^2 + 3)$;

4) (а) $y = C_1 xe^{x} + C_2$; (б) $dim = 2$; 1, xe^{x};

5) (а) $y = C_1 x\ln x + C_2$; (б) $dim = 2$; 1, $x\ln x$;

6) (а) $y = C_1 x(1 - \ln x) + C_2 x + C_3$;
(б) $dim = 3$; 1, x, $x(1 - \ln x)$;

7) (а) $y = C_1 x^4 + C_2 x^2 + C_3 x + C_2$;
(б) $dim = 4$; 1, x, x^2, x^4.

Автор: Н.С. НИКИТИНА