Тема: **«Обыкновенные дифференциальные уравнения»**

Тангенс угла наклона ($\mathrm{tg}\,\alpha$) касательной к интегральной кривой дифференциального уравнения в заданной точке (x_0, y_0).

Семейство изоклин для дифференциального уравнения.

Пример.

Стр. 149, пример 3:

$y' = x$. (*Ответ*: например, в точке $(\sqrt{3},\ 7)$ $\mathrm{tg}\,\alpha = \sqrt{3}$, $\alpha = \dfrac{\pi}{3}$;

семейство изоклин определяется уравнением $x = C$ для всех $C \in R$, т.е. представляет собой множество всех прямых перпендикулярных оси *Ox*.)

I. Дифференциальные уравнения первого порядка

1. Дифференциальные уравнения 1-го порядка с разделяющимися переменными (в их числе однородные линейные уравнения: $y' + p(x)\,y = 0$):

$$y' = f(x)\ g(y) = 0.$$

Примеры.

1. Стр. 158–159, выражения (53)–(56):

$y' - y\,\mathrm{tg}\,x = 0$. (*Ответ*: $y = \dfrac{C}{\cos x}$.)

2. Стр. 151, пример 4 (а):

$2y\sqrt{3y - y^2}\ dx - (9 + x^2)\ dy = 0$, $y(3) = 2$.

(*Ответ*: $y = \dfrac{3}{\left(\dfrac{\pi + 2\sqrt{2}}{4} - arctg\,\dfrac{x}{3}\right)^2 + 1}$.)

3. Стр. 151, пример 4 (б):

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y^2 + 1}{x^2 + 1}$, $y(0) = 1$. (*Ответ*: $y = \dfrac{1 + x}{1 - x}$.)

2. Дифференциальные уравнения 1-го порядка, сводящиеся к уравнениям с разделяющимися переменными путем введения новой неизвестной функции: $z = z(x)$.

(А) Уравнение вида $y' = f(ax + by + c)$, $b \neq 0$; подстановка $z = ax + by + c$.

Пример.

Стр. 151, пример 4 (в), стр. 153:

$y' = \cos(x - y)$, замена: $z = x - y$.

($Ответ$: $y = x + 2\pi k$, $y = x - 2\,\mathrm{arcctg}(-x + C) + 2\pi k$, ($k \in Z$).)

(Б) Однородные дифференциальные уравнения 1-го порядка, т.е. уравнения вида $P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = 0$, где $P(x, y)$, $Q(x, y)$ − однородные функции одинакового измерения; замена: $z = \dfrac{y}{x}$.

Пример.
Стр. 155, пример 5:

$(2\sqrt{x} - \sqrt{y}\,)\sqrt{y}dx + x\,dy = 0$. ($Ответ$: $\sqrt{\dfrac{y}{x}} = -\ln x + C$, $y = 0$, $x = 0$.)

(В) Неоднородные линейные дифференциальные уравнения 1-го порядка: $y' + p(x)\,y = q(x)$; метод вариации произвольной постоянной.

Пример.
Стр. 157, пример 6:

$y' - y\,\mathrm{tg}\,x = \cos x$, $y\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$. ($Ответ$: $y = \left(\dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{4}\sin 2x - \dfrac{\pi + 2}{8}\right)\dfrac{1}{\cos x}$.)

II. Дифференциальные уравнения высших порядков

1. Случай понижения порядка. Уравнение вида $F(x, y', y'') = 0$; замена: $y' = z(x)$.

Пример.
Стр. 164, пример 9 (б), стр. 166:

$xy'' - y'\left(2\ln\dfrac{y'}{x} + 1\right) = 0$, $y(1) = \dfrac{e + 2}{2}$, $y'(1) = e$. ($Ответ$: $y = \dfrac{\mathrm{e}^{x^2}}{2} + 1$.)

2. Случай непосредственного интегрирования. Уравнение вида $y^{(n)} = f(x)$.

Пример.
Стр. 164, пример 9 (а):

$y''' = \cos x - x^2$. ($Ответ$: $y = -\sin x - \dfrac{x^5}{60} + C_1 x^2 + C_2 x + C_3$.)

3. Однородные линейные уравнения с постоянными коэффициентами n-го порядка: $y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = 0$ (a_1, a_2 ,..., $a_n = const$); характеристическое уравнение, фундаментальная система решений.

Примеры.

1. Стр. 169, пример 10:

Характеристическое уравнение имеет следующие корни:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 7, \quad \lambda_5 = \lambda_6 = -2 + 5i, \quad \lambda_7 = \lambda_8 = -2 - 5i.$$

Записать общий интеграл соответствующего однородного линейного дифференциального уравнения.

$$(\textit{Ответ}\text{: } y = e^{7x}(C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 x^3) + e^{-2x}(C_5 \cos 5x + C_6 \sin 5x) + \\ + x e^{-2x}(C_7 \cos 5x + C_8 \sin 5x).)$$

2. Стр. 170, пример 11 (а):

$$y''' - 5y'' - 7y' + 51y = 0, \quad y(0) = -3, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 1.$$

$$(\textit{Ответ}\text{: } y = -e^{-3x} - 2e^{4x}\cos x + 5e^{4x}\sin x.)$$

Замечание. На стр. 171 опечатка: в формулах (102) следует читать $y'' = +9C_1 e^{-3x} + \ldots$. В результате находим $C_1 = -1$, $C_2 = -2$, $C_3 = 5$.

Стр. 170, пример 11 (б), стр. 172:

$$y''' + y'' - 5y' + 3y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1, \quad y''(0) = -2.$$

$$(\textit{Ответ}\text{: } y = \frac{1}{4}(e^{x} - e^{-3x}).)$$

III. Задачи для самостоятельного решения

Стр. 180, **3**. Для указанных дифференциальных уравнений а)найти тангенс угла наклона касательной к интегральной кривой в точках (2, 1), (–3, 5); б) записать уравнение для семейства изоклин и описать это множество изоклин.

Стр. 181, **4**; стр. 182, **5**; стр. 183, **6**; стр. 186, **9**(1-9);
стр. 189, **10**, **11**; стр. 190, **12**; стр. 191, **13**.

Литература

Никитина Н.С., Степанов А.В. Сборник задач по математике в экономике: учеб. пособие. – М.: МГИМО-Университет, 2001.

Автор: Никитина Н.С.