Тема. Основы теории множеств

§ 1. Понятие множества.

Множество, элемент множества, принадлежность элемента множеству – первичные понятия в математике и определению не подлежат.

Обозначения:

$A, B, \dots, X, Y, Z$ – множества;

$a, b, \dots, x, y, z$ – элементы множеств;

запись $a \in A$ означает, что a является элементом множества A, при этом говорят: «a принадлежит множеству A»;

запись $a \notin A$ означает, что a не является элементом множества A, при этом говорят: «a не принадлежит множеству A»;

Способы задания множеств.

1. *Перечислительный* (путем явного указания элементов).

Примеры. $A = \{1, 2, 3,\}$; $N = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$ – множество натуральных чисел.

2. *Описательный* (путем указания свойств элементов):

$X = \{x \mid \Phi\}$ – множество X состоит из тех элементов x, которые обладают свойством Φ.

Примеры. $X = \{x \mid x = 2k + 1,\ k = 0, 1, 2, \dots\}$ – множество нечетных чисел, может быть записано и первым, описательным способом: $X = \{1, 3, 5, \dots, 2k + 1, \dots\}$.

$A = \{x \in R \mid 2 \le x < 6\} = [2, 6)$, где R – множество действительных чисел.

Определения. **1.** Множества A и B называются *равными*, если они состоят из одних и тех же элементов.

Обозначение: $A = B$.

2. Если любой элемент множества B является также элементом множества A (случай $A = B$ не исключается), то множество B называется *подмножеством множества A*.

Обозначение: $B \subset A$.

Замечание: $A = B$ равносильно $A \subset B$ и $B \subset A$.

Примеры: 1) {множество целых чисел}$\subset R$;
2) $\{1, 3, 5, 7\} \subset \{-2{,}6;\ -2;\ 0;\ 0{,}9;\ 1;\ 2{,}5;\ 3;\ 3{,}27;\ 5;\ 6{,}1;\ 7;\ 8{,}3\}$;
3) $[-1{,}11;\ 2{,}7] \subset [-2;\ 5)$.

О п р е д е л е н и я . **3.** Множество, не содержащее ни одного элемента, называется *пустым* и обозначается $\varnothing$.

Замечание. Любое множество содержит в качестве своих подмножеств само себя и пустое множество, то есть для любого множества A справедливо $A \subset A$, $\varnothing \subset A$.

4. Подмножества множества, отличные от него самого и от пустого множества, называют *собственными*.

5. Если в конкретной задаче все рассматриваемые множества являются подмножествами некоторого множества S, то это множество называют *универсальным*.

П р и м е р ы : Записать все подмножества множества $A = \{1, 2, 3,\}$.

Ответ: $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{2, 3\}$, $\{1, 2, 3,\}$, $\varnothing$.

§ 2. Операции над множествами.

Пусть A и B – произвольные множества.

О п р е д е л е н и е. 1. *Объединением* или *суммой* множеств A и B называется множество, обозначаемое $A \cup B$ (или $A + B$) и состоящее из всех элементов, принадлежащих хотя бы одному из этих множеств A и B:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ или } x \in B\}.$$

П р и м е р . Пусть S – множество точек прямоугольника (универсальное множество); A и B – множество точек соответствующих кругов (см. рис. 1). Тогда $A \cup B$ – множество точек фигуры, заштрихованной на рис. 2.

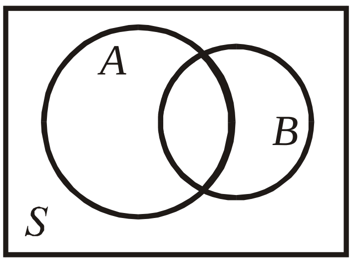

Рис. 1.

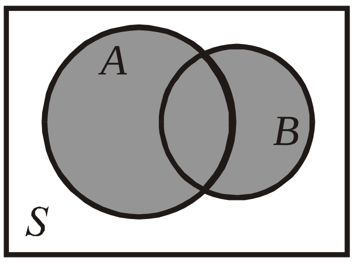

Рис. 2.

О п р е д е л е н и е. 2. *Пересечением* или *произведением* множеств A и B называется множество, обозначаемое $A \cap B$

(или AB) и состоящее из всех элементов, принадлежащих как множеству *A*, так и множеству *B*:

$$A \cap B = \left\{ x \,\middle|\, x \in A \text{ и } x \in B \right\}.$$

П р и м е р. На рис. 3 заштрихованная фигура есть Пересечение $A \cap B$ множеств *A* и *B*, представленных на рис. 1.

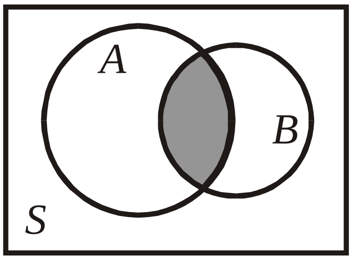

Рис. 3.

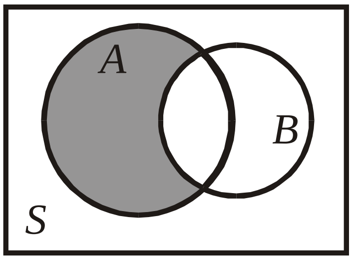

Рис. 4.

О п р е д е л е н и е. 3. *Разностью* множеств A и B называется множество, обозначаемое $A \setminus B$ (или $A - B$) и состоящее из всех элементов множества *A*, которые не содержатся во множестве *B*:

$$A \setminus B = \left\{ x \,\middle|\, x \in A,\ \ x \notin B \right\}.$$

П р и м е р. На рис. 4 заштрихованная фигура есть разность $A \setminus B$ множеств *A* и *B*, представленных на рис. 1.

О п р е д е л е н и е. 4. Разность $S \setminus A$, где S – универсальное множество, называется *дополнением множества* A и обозначается $\overline{A}$:

$$\overline{A} = S \setminus A = \left\{ x \,\middle|\, x \in S,\ \ x \notin A \right\}.$$

П р и м е р. На рис. 5 заштрихованная фигура есть дополнение $\overline{B}$ множества *B*, представленного на рис. 1.

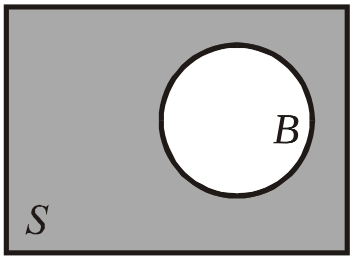

Рис. 5.

Замечание. В элементарной алгебре особая роль у чисел 0 и 1: для любого числа $a \in R$ справедливо $a + 0 = a$, $a \cdot 0 = 0$, $a \cdot 1 = a$. Здесь, очевидно, пустое множество $\varnothing$ и универсальное множество *S* аналоги 0 и 1, соответственно. Действительно, для любого множества $A \subset S$, как легко видеть, $A \cup \varnothing = A$, $A \cap \varnothing = \varnothing$, $A \cap S = A$.

Определение. 5. *Прямым* или *декартовым* произведением множеств A и B называется множество, обозначаемое $A \times B$ и состоящее из всевозможных упорядоченных пар (a, b) таких, что $a \in A$, $b \in B$:

$$A \times B = \{ x = (a, b) \mid a \in A,\ b \in B \}.$$

Если $A = B$, то

$$A^2 = A \times A = \{ x = (a, b) \mid a \in A,\ b \in A \}.$$

Последнее множество называют *декартовым квадратом*.

Аналогично

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_k = \\ = \{ x = (a_1, a_2, \ldots, a_k) \mid a_1 \in A_1,\ a_2 \in A_2, \ldots, a_k \in A_k \}.$$

Декартово произведение не обладает свойством коммутативности: $A \times B \neq B \times A$.

Пример. Плоскость, двумерное пространство или множество упорядоченных пар действительных чисел, обозначаемое через R^2, есть декартов квадрат множества действительных чисел R, а именно: $R^2 = R \times R$.

Трехмерное пространство или множество упорядоченных троек действительных чисел, обозначаемое через R^3, есть декартов куб множества действительных чисел R, а именно: $R^3 = R \times R \times R$.

Свойства операций объединения и пересечения множеств.

Ниже перечисленные утверждения непосредственно следуют из определений объединения и пересечения множеств.

1. Коммутативность: $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$.
2. Ассоциативность: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$, $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.
3. Дистрибутивность:

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C),$$
$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C).$$

Автор: Никитина Н.С.