Основы теории множеств

1. Множества. Подмножества. Способы задания множеств

Пример 1. Представить множество четных делителей числа 100 в описательной форме и путем полного перечисления элементов.

Решение. Для выделения подмножества A множества S можно использовать какое-либо свойство Ф, присущее элементам множества A и только им: характеристическое свойство элементов множества A. В этом случае пишут $A = \{ x \in S \mid \Phi \}$. Такой способ задания множества называют описательным.

Как известно, любое четное число имеет вид $2k$, $k = 1, 2, \ldots$, а тот факт, что какое-либо число $2k$ является делителем числа 100, означает, что отношение $\frac{100}{2k} = \frac{50}{k}$ есть натуральное число. Отсюда имеем искомое множество, представленное в описательной форме:

$$A = \left\{ 2k \in R \,\middle|\, \frac{50}{k} \in N, k \in N \right\},$$

где R – множество действительных чисел, N – множество натуральных чисел.

Так как $100 = 2^2 \cdot 5^2$, то легко перечислить все элементы искомого множества: $A = \{ 2, 4, 10, 20, 50, 100 \}$.

Пример 2. Даны множества

$$A = \{1, 3, 5, 7\},\ B = \{3, 5\},\ C = \{2\},\ D = \{5, 7, 9\},\ K = \{1, 3, 7\}.$$

Указать среди следующих утверждений истинные и ложные:

$$B \subset A,\ B \in A,\ \varnothing \subset B,\ D \not\subset A,\ \varnothing \in B,\ B \subset C,\ K \not\subset A,$$

$\varnothing$ – собственное подмножество множества A, $\{5, 7, 9\}$ – собственное подмножество множества D, K – собственное подмножество множества A.

Решение. По определению, если каждый элемент множества A является элементом множества B, то множество A называется подмножеством множества B. При этом пишут $A \subset B$ или $B \supset A$. Если множество A не является подмножеством множества B, то пишут $A \not\subset B$.

Множество, не содержащее ни одного элемента, называется пустым и обозначается знаком $\varnothing$. Подмножества множества, отличные от него самого и от пустого множества, называются собственными.

Руководствуясь понятием принадлежности элемента множеству и определением подмножества множества, находим, что утверждения

K – собственное подмножество множества A, $B \subset A$, $\varnothing \subset B$, $D \not\subset A$ – истинные;

$\varnothing$ – собственное подмножество множества A, $\{5, 7, 9\}$ – собственное подмножество множества D, $B \in A$, $\varnothing \in B$, $B \subset C$, $K \not\subset A$ – ложные.

2. Операции над множествами

Пример 3. Даны универсальное множество S и его подмножества A, B, C.

а) Определить множества $A \cup B$, $B \cap C$, $A \setminus C$, $\overline{B}$, если

$$S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\},$$

$$A = \{0, 2, 4, 6, 8\}, \; B = \{1, 3, 5\}, \; C = \{0, 3, 7, 9\}.$$

б) Определить множества $(A \setminus B) \cup C$, $\overline{B} \cap \overline{C}$, если

$$S = \{x \in R \mid 0 < x \le 12\}, \; A = \{x \in R \mid 2 \le x < 6\},$$

$$B = \{x \in R \mid 3 < x < 10\}, \; C = \{x \in R \mid 0 < x \le 2\},$$

где R – множество действительных чисел.

Решение. Объединением (суммой) множеств A и B называется множество

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ или } x \in B\}.$$

Пересечением (произведением) множеств A и B называется множество

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \in B\}.$$

Разностью множеств A и B называется множество

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A,\ \ x \notin B\}.$$

Дополнением множества A называется множество $\overline{A} = S \setminus A$, где S – универсальное множество.

а) По определениям имеем

$$A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8\}, \quad A \cap B = \{3\},$$

$$A \setminus C = \{2, 4, 6, 8\}, \quad \overline{B} = \{0, 2, 4, 6, 7, 8, 9\}.$$

б) По определениям последовательно находим (см. рис. 1)

$$A \setminus B = \{x \in R \mid 2 \le x \le 3\},$$

$$(A \setminus B) \cup C = \{x \in R \mid 0 < x \le 3\},$$

$$\overline{B} = \{x \in R \mid 0 < x \le 3,\ \ 10 \le x \le 12\},$$

$$\overline{C} = \{x \in R \mid 2 < x \le 12\},$$

$$\overline{B} \cap \overline{C} = \{x \in R \mid 2 < x \le 3,\ \ 10 \le x \le 12\}.$$

3. Декартово произведение множеств

Пример 4. Определить элементы

а) декартова произведения $A \times B$, если

$$A = \{4, 7, 8\}, \qquad B = \{a, b, c, d\};$$

б) множества $(A \cap B) \times C$, если

$$A=\{10, 15, 20, 99, 100, 170\}, \quad B=\{0, 1, 15, 45, 99, 115, 170\},$$
$$C=\{\alpha, \beta\}.$$

Решение. Декартовым (прямым) произведением множеств A и B называется множество

$$A\times B = \{x=(a, b)\,|\,a\in A,\ b\in B\}.$$

Множество

$$A^2 = A\times A = \{x=(a, b)\,|\,a\in A,\ b\in A\}$$

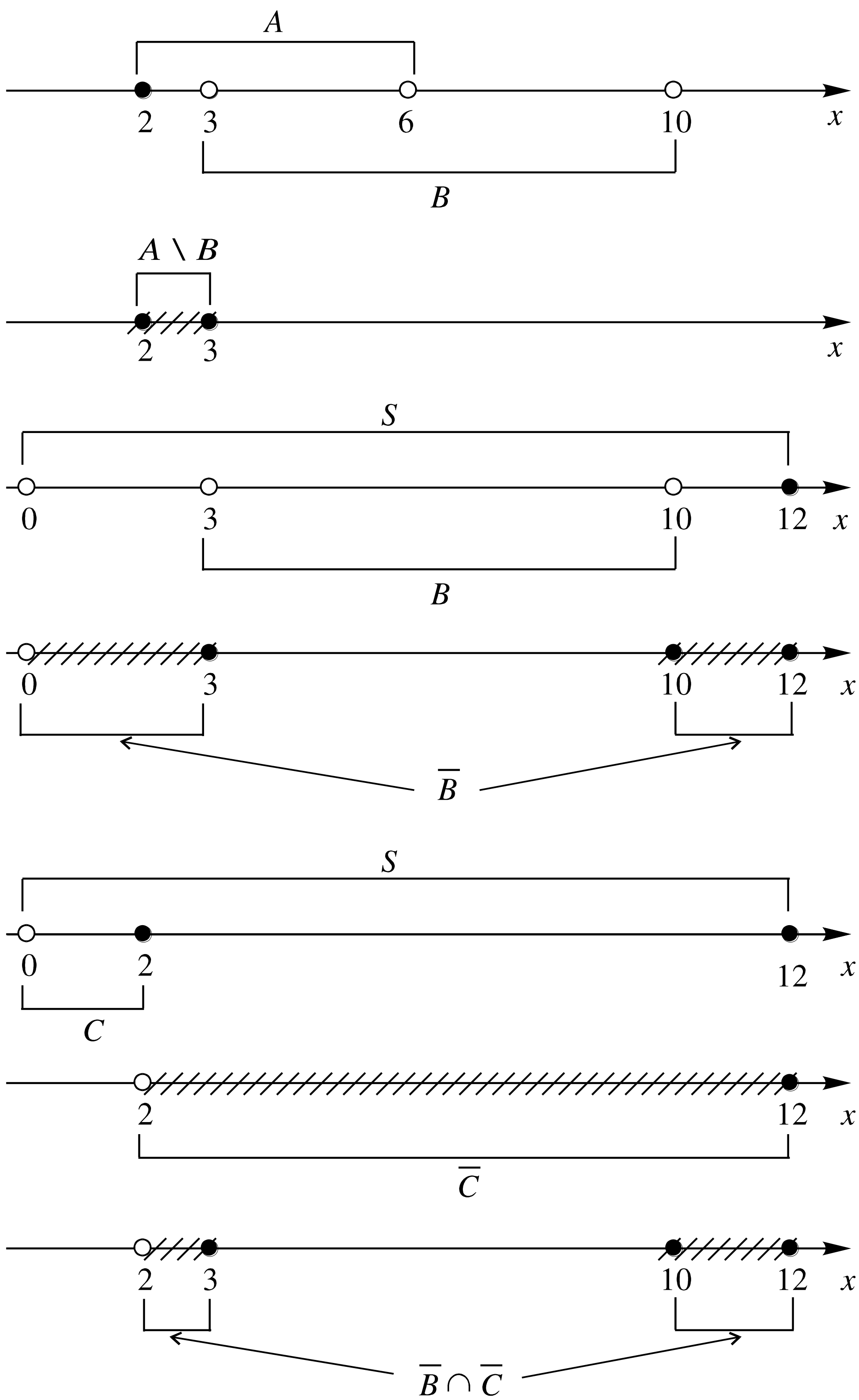
называется декартовым квадратом.

а) По определению имеем

$$A\times B=\{(4, a), (4, b), (4, c), (4, d), (7, a), (7, b), (7, c), (7,d),$$
$$(8, a), (8, b), (8, c), (8, d)\}.$$

б) По определению находим

$$A\cap B=\{15, 99, 170\},$$
$$(A\cap B)\times C=\{(15, \alpha), (15, \beta), (99, \alpha), (99, \beta), (170, \alpha), (170, \beta)\}.$$



A
2
3
6
10
x
B
A \ B
2
3
x
S
0
3
10
12
x
B
0
3
10
12
x
B̄
S
0
2
12
x
C
2
12
x
C̄
2
3
10
12
x
B̄ ∩ C̄

Рис. 1.

Задачи для самостоятельного решения

1. Записать множество натуральных чисел, делящихся без остатка на 3 и не превышающих 40, путем перечисления и описания его элементов.

2. Указать все подмножества множества $\{a, b, c\}$.

3. Даны множества

$$A = \{x \in R \mid -5 \le x < 1\}, \quad B = \{x \in R \mid -5 < x \le 0\},$$

$$C = \{x \in R \mid -2 \le x \le 1/2\}, \quad D = \{x \in R \mid 0 < x < 1\}.$$

Указать среди следующих утверждений истинные и ложные:

$$C \subset D,\ C \not\subset D,\ \varnothing \in A,\ C \subset A,\ B \in A,\ \varnothing \subset B,\ 2 \in D,\ -2 \in B,$$

$\varnothing$ – собственное подмножество множества B, B – собственное подмножество множества A.

4. Из каких элементов состоят множества $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$,.если $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 4, 5\}$?

5. Определить множества $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $\overline{A}$, $\overline{B}$, если $A = \{x \in R \mid x > 1\}$, $B = \{x \in R \mid x < 2\}$.

6. Даны универсальное множество S и его подмножества A, B, C. Определить множества $A \cup B$, $B \cap C$, $A \setminus C$, $\overline{B}$, $(A \cup C) \cap B$, $\overline{(\overline{A} \setminus B) \cup C}$, $(A \cap \overline{C}) \setminus B$, если

1) $S = \{x \in R \mid 0 \le x \le 10\}$, $\quad A = \{x \in R \mid 1 < x < 7\}$,

$B = \{x \in R \mid 2 \le x < 8\}$, $\quad C = \{x \in R \mid 7 < x \le 9\}$;

2) $S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $A = \{1, 2, 3, 4\}$,

$B = \{1, 3, 5\}$, $C = \{4, 6\}$.

7. Определить множества $A \times B$, $B \times A$, A^2, B^2, если

$$A = \{1,2\}, \qquad B = \{2,3\}.$$

8. Определить элементы

1) декартова произведения $A \times B$, если $A = \{a, b, c\}$, $B = \{0, 1, 2, 3\}$;

2) множества $(A \setminus B)^2 \times (B \setminus A)^2$, если $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{3, 5\}$.

9. Даны произвольные множества *A, B, C*. С помощью операций объединения и пересечения записать множество, состоящее из элементов, принадлежащих 1) всем трем множествам; 2) хотя бы одному множеству; 3) по крайней мере двум из этих множеств.

10. Чему равны множества $A \cup B$, $A \cap B$, если $A \subset B$?

11. Пусть A и B – произвольные подмножества универсального множества *S*. Чему равны следующие множества:

1) $A \cup \overline{A}$; 2) $B \cap \overline{B}$; 3) $\left(\overline{\overline{A}}\right)$;

4) $\left(A \cap \overline{B}\right) \cup \left(\overline{A} \cap B\right)$; 5) $\overline{A \setminus B}$; 6) $A \setminus (A \setminus B)$;

7) $(A \cap B) \cup \left(\overline{A} \cap \overline{B}\right)$?

12. Определить, в каком отношении ($X \subset Y$, $X \supset Y$, $X = Y$) находятся множества *X* и *Y*, если

1) $X = A \cup (B \setminus C)$, $Y = (A \cup B) \setminus (A \cup C)$;

2) $X = (A \cap B) \setminus C$, $Y = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$;

3) $X = A \setminus (B \cup C)$, $Y = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.

(Здесь *A, B, C, D* – произвольные множества.)

13. Пусть

$$A = \{x \in N \mid 2 < x \le 6\}, \qquad B = \{x \in N \mid 1 < x < 4\},$$

$$C = \{x \in N \mid x^2 - 4 = 0\},$$

где **N** – множество натуральных чисел. Из каких элементов состоят множества

1) $B \cup C$; 2) $A \cap B \cap C$; 3) $A \cup B \cup C$;

4) $(A \cap B) \cup (B \cap C)$; 5) $B \times C$; 6) $C \times B$?

14. Множества A и B – являются подмножествами универсального множества S (рис. 2). Заштриховать на рисунке следующие множества:

1) $A \cup \overline{B}$; 2) $\overline{A} \cap B$; 3) $\overline{A \cup B}$;

4) $\overline{(A \cup \overline{B})}$; 5) $\overline{A \cap B}$;

6) $(\overline{A} \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$.

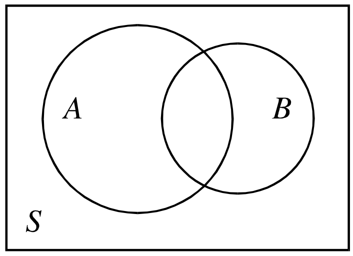


Рис. 2.

15. Проверьте следующие соотношения (так называемые правила де Моргана):

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}; \qquad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

Автор: Никитина Н.С.