Тема: «Линейная зависимость системы векторов»

(типовые примеры с решениями)

Пример 1. Путем приведения элементарными преобразованиями исходной матрицы к ступенчатому виду определить а) ранг матрицы:

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\1&1&1&3&5\\2&2&2&3&7\\3&3&3&4&8\\4&5&7&6&8\end{pmatrix};$$

б) указать какой-либо ее базисный минор и соответствующие ему

в) базисные строки и

г) базисные столбцы.

Решение.

$$B=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\1&1&1&3&5\\2&2&2&3&7\\3&3&3&4&8\\4&5&7&6&8\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\0&0&0&2&4\\0&0&0&1&5\\0&0&0&1&5\\0&1&3&2&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\0&0&0&1&2\\0&0&0&1&5\\0&0&0&1&5\\0&1&3&2&4\end{pmatrix}\to$$

Пятую строку поместим на место второй:

$$\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\0&0&0&1&2\\0&0&0&1&5\\0&0&0&1&5\\0&1&3&2&4\end{pmatrix}\to\begin{array}{cl}\begin{pmatrix}1&1&1&1&1\\0&1&3&2&4\\0&0&0&1&2\\0&0&0&1&5\\0&0&0&1&5\end{pmatrix}\to & \begin{array}{l}\text{1-я строка}\\ \text{5-я строка}\\ \text{2-я строка}\\ \text{3-я строка}\\ \text{4-я строка}\end{array}\end{array}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccccc} \text{1-й столбец} & \text{2-й столбец} & & \text{4-й столбец} & \text{5-й столбец} \end{array} \end{array} \to \begin{array}{l} \text{1-я строка} \\ \text{5-я строка} \\ \text{2-я строка} \\ \text{3-я строка} \\ \text{4-я строка} \end{array}$$

Полученная ступенчатая матрица имеет четыре отличные от нуля строки и, следовательно, ранг заданной матрицы равен четырем: $Rg\boldsymbol{B} = 4$.

В качестве базисных строк матрицы $\boldsymbol{B}$ запишем строки матрицы $\boldsymbol{B}$, соответствующие отличным от нуля строкам ступенчатой матрицы, то есть 1-ю, 2-ю, 3-ю и 5-ю строки:

$$(1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1), \quad (1 \quad 1 \quad 1 \quad 3 \quad 5), \quad (2 \quad 2 \quad 2 \quad 3 \quad 7),$$
$$(4 \quad 5 \quad 7 \quad 6 \quad 8).$$

В качестве базисных столбцов матрицы $\boldsymbol{B}$ запишем столбцы матрицы $\boldsymbol{B}$, соответствующие столбцам ступенчатой матрицы, содержащим ведущие элементы, то есть 1-й, 2-й, 4-й и 5-й столбцы:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 7 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Базисный минор, соответствующий вышеуказанным базисным строкам и базисным столбцам есть определитель матрицы, образованной элементами исходной матрицы $\boldsymbol{B}$, находящимися на пересечении 1-й, 2-й, 3-й, 5-й строки и 1-го, 2-го, 4-го, 5-го столбца матрицы $\boldsymbol{B}$:

$$
\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 2 & 2 & 3 & 7 \\ 3 & 3 & 3 & 4 & 8 \\ 4 & 5 & 7 & 6 & 8 \end{pmatrix},
$$

то есть базисный минор есть следующий определитель:

$$
\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 2 & 3 & 7 \\ 4 & 5 & 6 & 8 \end{vmatrix} = 6 .
$$

Ответ: а) $Rg\,\boldsymbol{B} = 4$; б) базисный минор: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 2 & 3 & 7 \\ 4 & 5 & 6 & 8 \end{vmatrix} = 6$;

в) базисные строки: $(1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1)$, $(1 \quad 1 \quad 1 \quad 3 \quad 5)$,
$(2 \quad 2 \quad 2 \quad 3 \quad 7)$, $(4 \quad 5 \quad 7 \quad 6 \quad 8)$;

г) базисные столбцы: $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 7 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix}$.

Замечание. Если при приведении матрицы к ступенчатому виду элементарными преобразованиями получается несколько одинаковых строк, то можно оставить только одну из них. В рассмотренном примере 3-я и 4-я строки матрицы $\boldsymbol{B}$ в результате элементарных преобразований становятся одинаковыми, поэтому вместо 3-й строки в качестве базисной можно было взять 4-ю.

Пример 2. Для системы векторов:

$$a_1=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix},\quad a_2=\begin{pmatrix}2\\3\\4\\5\end{pmatrix},\quad a_3=\begin{pmatrix}3\\4\\5\\6\end{pmatrix},\quad a_4=\begin{pmatrix}4\\5\\6\\7\end{pmatrix}, \qquad (1)$$

а) выяснить, является ли она линейно зависимой.
Указать
б) ранг системы векторов (1);
в) какой-либо базис системы векторов (1) и разложить все векторы системы (1) по этому базису.

Решение. Приравняем линейную комбинацию векторов (1) нулю:

$$C_1a_1+C_2a_2+C_3a_3+C_4a_4=0. \qquad (2)$$

Однородную линейную алгебраическую систему уравнений (2) относительно неизвестных C_1, C_2, C_3, C_4 решим методом Гаусса:

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1&2&3&4&0\\2&3&4&5&0\\3&4&5&6&0\\4&5&6&7&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc|c}1&2&3&4&0\\0&1&2&3&0\\0&2&4&6&0\\0&3&6&9&0\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc|c}1&2&3&4&0\\0&1&2&3&0\\0&1&2&3&0\\0&1&2&3&0\end{array}\right)\to$$

$$\to\left(\begin{array}{cccc|c}1&2&3&4&0\\0&1&2&3&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{array}\right). \qquad (3)$$

Из вида ступенчатой матрицы (3) следует, что система уравнений (5) является неопределенной (не все переменные базисные: переменные C_3, C_4 – свободные), то есть имеются ненулевые решения $(C_1,C_2,C_3,C_4)^T$ и, следовательно, заданная система векторов (1) линейно зависимая. Так как ступенчатая матрица (3) имеет две отличные от нуля строки, то ранг системы векторов (1) равен двум, а базисом системы (1) является любая пара векторов: (a_1, a_2), (a_1, a_3), (a_1, a_4), (a_2, a_3), (a_2, a_4), (a_3, a_4), так как все пары векторов не пропорциональны.

Найдем разложение всех векторов (1), например, по базису (a_1, a_2). Разложение базисных векторов a_1, a_2 по базису (a_1, a_2) очевидно: $a_1 = 1 \cdot a_1 + 0 \cdot a_2$, $a_2 = 0 \cdot a_1 + 1 \cdot a_2$. Теперь рассмотрим векторы a_3, a_4, не вошедшие в базис (a_1, a_2).

Запишем разложение вектора a_3 по рассматриваемому базису:

$$a_3 = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2. \qquad (4)$$

Неоднородную линейную алгебраическую систему уравнений (4) относительно неизвестных α_1, α_2 решим методом Гаусса, используя имеющееся преобразование (3):

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Отсюда $\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 = 3, \\ \alpha_2 = 3, \end{cases}$ и $\alpha_1 = -1$. Подставим найденные коэффициенты $\alpha_1 = -1$, $\alpha_2 = 3$ в (4) и получим разложение вектора a_3 по базису (a_1, a_2):

$$a_3 = -a_1 + 2a_2.$$

Аналогично получим разложение вектора a_4 по базису (a_1, a_2):

$$a_4 = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2;$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 7 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right); \qquad \begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 = 4, \\ \alpha_2 = 3, \end{cases} \quad \alpha_1 = -2;$$

$a_4 = -2a_1 + 3a_2$ – разложение вектора a_4 по базису (a_1, a_2).

Ответ: а) линейно зависимая; б) $Rg = 2$;

в) базис: $(a_1,\ a_2)$,

разложение векторов по указанному базису:

$$a_1 = 1 \cdot a_1 + 0 \cdot a_2, \quad a_2 = 0 \cdot a_1 + 1 \cdot a_2,$$

$$a_3 = -a_1 + 2a_2, \quad a_4 = -2a_1 + 3a_2.$$

До сих пор под векторами подразумевались матрицы-столбцы или матрицы-строки. В дальнейшем мы перейдем к рассмотрению линейных пространств, элементы которых независимо от их природы также называют векторами и для которых остаются в силе все определения и утверждения, с которыми мы имели дело при решении предыдущих примеров. Ранее рассмотренные в примерах векторы являются элементами так называемых арифметических (координатных) линейных пространств. В следующем примере рассмотрим векторы другой природы.

Пример 3. Выяснить, какие из нижеперечисленных систем векторов являются линейно зависимыми:

$$1)\ e^x,\ e^{2x},\ e^{3x}; \qquad (5)$$

$$2)\ 2,\ \sin x,\ \sin^2 x,\ \cos^2 x. \qquad (6)$$

Для линейно зависимой системы векторов указать какой-либо ее базис.

Решение. ***1.*** Приравняем линейную комбинацию векторов (5) нулю:

$$C_1 e^x + C_2 e^{2x} + C_3 e^{3x} = 0 \text{ для всех } x \in R. \qquad (7)$$

(Здесь и ниже R – множество действительных чисел.)

Предположим, что заданная система векторов линейно зависимая, то есть хотя бы один из коэффициентов $C_1,\ C_2,\ C_3$ в (7) отличен от нуля, и дважды продифференцируем правую и левую части уравнения (7) по переменной x:

$$C_1 e^x + 2C_2 e^{2x} + 3C_3 e^{3x} = 0,$$

$$C_1 e^x + 4C_2 e^{2x} + 9C_3 e^{3x} = 0.$$

Итак, имеем систему из трех уравнений относительно неизвестных C_1, C_2, C_3:

$$\begin{cases} C_1e^x + C_2e^{2x} + C_3e^{3x} = 0, \\ C_1e^x + 2C_2e^{2x} + 3C_3e^{3x} = 0, \\ C_1e^x + 4C_2e^{2x} + 9C_3e^{3x} = 0. \end{cases} \tag{8}$$

Если система векторов (5) линейно зависимая, то она линейно зависимая при любом значении переменной x, поэтому, не нарушая общности, можно в (8) положить переменную x равной любому действительному числу. Пусть $x = 0$. Отсюда

$$\begin{cases} C_1 + C_2 + C_3 = 0, \\ C_1 + 2C_2 + 3C_3 = 0, \\ C_1 + 4C_2 + 9C_3 = 0. \end{cases} \tag{9}$$

Для определителя матрицы системы (9) имеем $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$, и приходим к выводу, что система (9) имеет единственное решение: C_1=C_2=C_3=0. Это противоречит нашему предположению о линейной зависимости заданной системы векторов, то есть предположению, что хотя бы один из коэффициентов C_1, C_2, C_3 в (7) отличен от нуля. Это значит, что равенство (7) имеет место только при C_1=C_2=C_3=0, то есть заданная система векторов линейно независимая.

Ответ: e^x, e^{2x}, e^{3x} – линейно независимая система векторов; $Rg = 3$.

Замечание. Зачем предположили, что заданная система векторов линейно зависимая, то есть хотя бы один из коэффициентов C_1, C_2, C_3 в (7) отличен от нуля? Если C_1=C_2=C_3=0, то (7) превращается в тождество 0=0 и дифференцирование правой и левой части уравнения (7) по переменной x лишено смысла.

2. Введем обозначения для векторов заданной системы (6):

$$a_1 = 2,\ a_2 = sinx,\ a_3 = sin^2x,\ a_4 = cos^2x \tag{10}$$

Рассмотрим, например, вектор $a_4 = cos^2x$. Легко видеть

$$a_4 = cos^2x = 1 - sin^2x = \frac{1}{2}\cdot a_1 + 0\cdot a_2 + (-1)\cdot a_3, \tag{11}$$

что по определению и означает линейную зависимость заданной системы векторов (6) или (10).

Найдем какой-либо базис этой системы векторов. Так как система (10) линейно зависимая, то ее ранг меньше четырех. Попробуем найти какую-нибудь тройку линейно независимых векторов из списка 2, $sinx$, sin^2x, cos^2x. Вектор a_4 является линейной комбинацией векторов a_1, a_3: $a_4 = \frac{1}{2}\cdot a_1 + (-1)\cdot a_3$ (см. (11)), и поэтому логично рассмотреть систему векторов $a_1 = 2$, $a_2 = sinx$, $a_3 = sin^2x$. Приравняем их линейную комбинацию нулю:

$$C_1 2 + C_2 sin\,x + C_3 sin^2x = 0 \text{ для всех } x \in R. \tag{12}$$

Как и при решении предыдущего примера, предположим, что система векторов 2, $sinx$, sin^2x линейно зависимая, и продифференцируем уравнение (12) несколько раз по x. Если в дальнейшем положить $x = 0$, то выражение (12) превратится в тождество 0=0. Поэтому возьмем $x = \frac{\pi}{2}$, и так как $cos\frac{\pi}{2} = 0$, то для того чтобы получить систему из трех уравнений относительно C_1, C_2, C_3 при $x = \frac{\pi}{2}$ придется уравнение (12) четыре раза продифференцировать по x:

$$C_2 cosx + C_3 sin2x = 0,$$
$$-C_2 sinx + 2C_3 cos2x = 0,$$
$$-C_2 cosx - 4C_3 sin2x = 0,$$
$$C_2 sinx - 8C_3 cos2x = 0.$$

Итак, имеем следующую систему из пяти уравнений относительно неизвестных C_1, C_2, C_3:

$$\begin{cases} C_1 2 + C_2 sin x + C_3 sin^2 x = 0, \\ C_2 cos x + C_3 sin 2x = 0, \\ -C_2 sin x + 2C_3 cos 2x = 0, \\ -C_2 cos x - 4C_3 sin 2x = 0, \\ C_2 sin x - 8C_3 cos 2x = 0. \end{cases} \qquad (13)$$

При $x = \frac{\pi}{2}$ из системы (13) получим систему из трех уравнений:

$$\begin{cases} 2C_1 + C_2 + C_3 = 0, \\ -C_2 - 2C_3 = 0, \\ C_2 - 8C_3 = 0. \end{cases} \qquad (14)$$

Очевидно, система (14) имеет единственное решение: $C_1 = C_2 = C_3 = 0$. Пришли к противоречию с предположением о линейной зависимости системы векторов 2, $sinx$, $sin^2 x$, что и доказывает ее линейную независимость, причем это максимальная линейно независимая подсистема.

Ответ:

$a_1 = 2$, $a_2 = sinx$, $a_3 = sin^2 x$, $a_4 = cos^2 x$ – линейно зависимая система векторов;

$Rg = 3$;

базис: $a_1 = 2$, $a_2 = sinx$, $a_3 = sin^2 x$;

разложение векторов системы (6) по указанному базису:

$$a_1 = 1 \cdot a_1 + 0 \cdot a_2 + 0 \cdot a_3, \qquad a_2 = 0 \cdot a_1 + 1 \cdot a_2 + 0 \cdot a_3,$$

$$a_3 = 0 \cdot a_1 + 0 \cdot a_2 + 1 \cdot a_3, \qquad a_4 = \frac{1}{2} \cdot a_1 + 0 \cdot a_2 + (-1) \cdot a_3$$

Системы линейных алгебраических уравнений

А. Рассмотрим неоднородную систему $Ax = b$.

Теорема Кронекера-Капелли. Система линейных алгебраических уравнений $A\overline{x} = \overline{b}$ совместна тогда и только тогда, когда $Rg A = Rg[A\overline{b}]$. (Напомним, что $[A\overline{b}]$ – расширенная матрица системы.)

Число базисных переменных равно $Rg\ A$; количество свободных переменных равно $n - Rg\ A$.

Б. <u>Рассмотрим однородную систему</u> $A\overline{x} = 0$.

Пусть A – матрица размера $m \times n$.

***Теоремы*. 1.** Если $RgA = n$, то система $A\overline{x} = \overline{0}$ определенная. (Другими словами, имеет единственное решение, а именно: $\overline{x} = \overline{0}$.)

2. Если $RgA < n$ (в частности, если $m < n$), то система $A\overline{x} = \overline{0}$ неопределенная. (Имеет бесконечное множество решений, среди которых есть, конечно, и нулевое: $\overline{x} = \overline{0}$.) Число векторов в максимальной линейно независимой подсистеме или базисе решений системы $A\overline{x} = \overline{0}$ равно $n - RgA$, то есть числу свободных переменных.

Терминология. Всякая максимальная линейно независимая подсистема или базис решений системы $A\overline{x} = \overline{0}$ называется *фундаментальной системой решений*; число векторов в фундаментальной системе решений равно: $n - RgA$, то есть числу свободных переменных.

Пример 4. Указать какую-либо фундаментальную систему решений для следующей однородной системы линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_5 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + x_5 - 2x_6 = 0, \\ -x_2 + 2x_3 - x_4 = 0; \end{cases} \tag{15}$$

Решение. Представим систему (15) в матричном виде:

$$A\overline{x} = \overline{0},$$

где $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ – матрица системы, (16)

$\overline{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ – столбец свободных членов,

$$\bar{x}=\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\\ x_5\\ x_6 \end{pmatrix}$$ – столбец неизвестных.

Методом Гаусса найдем общее решение системы (15):

$$[A\bar{0}]=\left(\begin{array}{cccccc|c} 2 & -1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0\\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)\to$$

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 2 & -1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0\\ 0 & -5 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0\\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)\to$$

$$\to\left(\begin{array}{cccccc|c} 2 & -1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0\\ 0 & -5 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0\\ 0 & 0 & -10 & 5 & 0 & 4 & 0 \end{array}\right). \qquad (17)$$

Отсюда

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_5 = 0,\\ -5x_2 + 4x_6 = 0,\\ -10x_3 + 5x_4 + 4x_6 = 0. \end{cases}$$

Выразим базисные переменные x_1, x_2, x_3 через свободные x_4, x_5, x_6 и получим общее решение системы (15):

$$x=\begin{pmatrix} (-5x_5+2x_6)/5\\ 4x_6/5\\ (5x_4+4x_6)/10\\ x_4\\ x_5\\ x_6 \end{pmatrix}=$$

$$= x_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_5 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_6 \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \text{для всех} \quad x_4, x_5, x_6 \in R. \qquad (18)$$

(Для того, чтобы компоненты векторов были целыми числами, в (18) переобозначены свободные переменные: $x_4 \to 2x_4$, $x_6 \to 5x_6$).

Система векторов

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad (19)$$

является фундаментальной системой решений заданной однородной системы (15). Другими словами, векторы (19) составляют базис системы векторов (18), то есть любое решение системы уравнений (15) представимо в виде линейной комбинации векторов (19). Выражение (18) есть разложение вектора-решения по базису (19), а в качестве коэффициентов разложения выступают значения свободных переменных x_4, x_5 и x_6.

Подытожим: в этом примере размер матрицы системы (15) 3×6, то есть $m = 3$, $n = 6$. У ступенчатой матрицы (17) три строки отличны от нуля. Отсюда $Rg\, A = 3$ и, как утверждалось выше, число векторов в фундаментальной системе решений равно числу свободных переменных: $n - Rg\, A = 6 - 3 = 3$. Число базисных переменных равно $Rg\, A = 3$.

Автор: Н.С. НИКИТИНА