Тема. Линейные пространства

§1. Определение линейного пространства. Конечномерные пространства

Введем обозначения: L – множество; $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ –элементы множества L.

Пусть на множестве L определены сумма элементов (операция сложения): $\overline{a}+\overline{b}\in L$ для всех $\overline{a}\in L$, $\overline{b}\in L$, произведение числа и элемента (операция умножения на число): $\alpha\overline{a}\in L$ для всех $\overline{a}\in L$, $\alpha\in R$ (R – множество действительных чисел).

Определение. Множество L называют *действительным линейным* (или *векторным*, или *афинным*) пространством, если указанные операции удовлетворяют следующими аксиомам для любых элементов $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}\in L$ и чисел α, β:

(I) «$\overline{a}+\overline{b}$» = «$\overline{b}+\overline{a}$» (коммутативность сложения элементов),

(II) «$(\overline{a}+\overline{b})+\overline{c}$» = «$\overline{a}+(\overline{b}+\overline{c})$» (ассоциативность сложения элементов),

(III) «$\overline{a}+\overline{0}$» = $\overline{a}$ (существование нулевого элемента $\overline{0}$),

(IV) «$\overline{a}+(-\overline{a})$» = $\overline{0}$ (существование противоположного элемента $-\overline{a}$),

(V) «$\alpha(\overline{a}+\overline{b})$» = «$\alpha\overline{a}+\alpha\overline{b}$» (дистрибутивность относительно суммы элементов),

(VI) «$(\alpha+\beta)\overline{a}$» = «$\alpha\overline{a}+\beta\overline{a}$» (дистрибутивность относительно суммы числовых множителей),

(VII) «$(\alpha\beta)\overline{a}$» = «$\alpha(\beta\overline{a})$» (ассоциативность относительно суммы числовых множителей),

(VIII) «$1\cdot\overline{a}$» = $\overline{a}$.

Следствия из аксиом (I) – (VIII):

1) единственность нулевого элемента,

2) единственность противоположного элемента,

3) существование и единственность разности: «$\overline{a}-\overline{b}$» = «$\overline{a}+(-\overline{b})$»,

4) «$\alpha\cdot\overline{0}$» = $\overline{0}$,

5) «$0\cdot\overline{a}$» = $\overline{0}$,

6) если «$\alpha\overline{a}$» = $\overline{0}$, то или $\alpha=0$, или $\overline{a}=\overline{0}$,

7) «$\alpha(-\overline{a})$» = – «$\alpha\overline{a}$», то есть элемент «$\alpha(-\overline{a})$» противоположен элементу «$\alpha\overline{a}$»,

8) «$(-\alpha)\overline{a}$» = – «$\alpha\overline{a}$», то есть элемент «$(-\alpha)\overline{a}$» противоположен элементу «$\alpha\overline{a}$», в частности, $-\overline{a}$ = «$(-1)\overline{a}$»,

9) «$\alpha(\overline{a}-\overline{b})$» = «$\alpha\overline{a}-\alpha\overline{b}$»,

10) «$(\alpha-\beta)\overline{a}$» = «$\alpha\overline{a}-\beta\overline{a}$».

Замечание. В дальнейшем, если это не приводит к неоднозначной интерпретации, будем опускать кавычки в обозначениях суммы элементов и умножения элемента на число, в частности, при рассмотрении линейных пространств с обычными (традиционными) операциями сложения и умножения.

Определение. Линейное пространство L называется *конечномерным*, если в нем можно найти конечную максимальную линейно независимую систему элементов. Такую (упорядочную) систему элементов называют *базисом пространства* L.

Введем обозначения: $dimL=n$ – число элементов в базисе.

Терминология: $dimL=n$ – *размерность линейного пространства*; L_n – n-мерное линейное пространство.

Пусть $(\overline{e}_1,\ \overline{e}_2,\ \ldots,\ \overline{e}_n)$ – базис в L_n. Как уже отмечалось выше, представление элемента $\overline{a}\in L$ в виде линейной комбинации базисных векторов (элементов):

$$\overline{a}=\alpha_1\overline{e}_1+\alpha_2\overline{e}_2+\ldots+\alpha_n\overline{e}_n, \qquad (1)$$

называется *разложением элемента* $\overline{a}\in L$ *по базису* $(\overline{e}_1,\ \overline{e}_2,\ \ldots,\ \overline{e}_n)$.

Из определения базиса следует, что любой элемент $\overline{a}$ n-мерного линейного пространства L_n единственным образом можно представить в виде (1). *Координатами вектора* $\bar{a} \in L$ *в базисе* $(\bar{e}_1,\ \bar{e}_2,\ \ldots,\ \bar{e}_n)$ называется (однозначно определенная) упорядоченная совокупность чисел $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_n$ – коэффициентов разложения (1). Столбец $a_e = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ будем называть *вектором координат вектора* $\bar{a}$ линейного пространства L_n в базисе $(\bar{e}_1,\ \bar{e}_2,\ \ldots,\ \bar{e}_n)$.

Не в каждом пространстве можно указать максимальное число линейно независимых векторов.

Определение. Линейное пространство называется *бесконечномерным*, если для любого числа $k \in N$ (N - множество натуральных чисел) в нем найдутся k линейно независимых векторов.

§2. Примеры линейных пространств

В ниже приведенных примерах линейных пространств указаны обычные правила сложения элементов и умножения элемента на число, известные из предыдущих лекций или из школьного курса математики, а в качестве базисов рассматриваются так называемые естественные базисы.

1$^{\text{o}}$. Геометрические пространства V_1, V_2, V_3.

1. V_1 – все направленные отрезки, принадлежащие одной прямой и исходящие из одной точки O этой прямой.

Суммой двух направленных отрезков $\bar{a}$ и $\bar{b}$ есть направленный отрезок $\bar{a} + \bar{b}$.

В случае если отрезки $\bar{a}$ и $\bar{b}$ имеют одно направление, то длина направленного отрезка $\bar{a} + \bar{b}$ равна сумме длин отрезков $\bar{a}$ и $\bar{b}$, и отрезок $\bar{a} + \bar{b}$ направлен также как и исходные отрезки $\bar{a}$ и $\bar{b}$ (см. рис. 1).

В случае если отрезки $\bar{a}$ и $\bar{b}$ имеют противоположное направление, то длина направленного отрезка $\bar{a} + \bar{b}$ равна разности длин отрезков $\overline{a}$ и $\overline{b}$, и отрезок $\overline{a}+\overline{b}$ направлен также как и отрезок, который длиннее из двух отрезов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ (см. рис. 2).

Произведение направленного отрезка $\overline{a}$ на число α есть направленный отрезок $\alpha\overline{a}$. Если $\alpha>0$, то вектор $\alpha\overline{a}$ направлен также как и направленный отрезок $\overline{a}$; если же $\alpha<0$, то вектор $\alpha\overline{a}$ имеет направление, противоположное направленному отрезку $\overline{a}$. Длина отрезка $\alpha\overline{a}$, если $|\alpha|>1$, в $|\alpha|$ раз длиннее, чем длина направленного отрезка $\overline{a}$, а если $0<|\alpha|<1$, то в $\dfrac{1}{|\alpha|}$ раз короче, чем длина направленного отрезка $\overline{a}$ (см. рис. 3, 4).

Нулевой элемент есть направленный отрезок, для которого начало отрезка совпадает с концом, то есть это точка *O*.

Направленный отрезок $-\overline{a}$, противоположный направленному отрезку $\overline{a}$, то есть *противоположный элемент*, есть отрезок той же длины, что и отрезок $\overline{a}$, и имеющий направление, противоположное направлению отрезка $\overline{a}$. См выше § 1, следствие (8): $-\overline{a}=(-1)\overline{a}$.

Базис: любой ненулевой вектор; $dimV_1=1$.

2. V_2 – все направленные отрезки, принадлежащие одной плоскости и исходящие из одной точки *O* этой плоскости ($V_1\subset V_2$).

Произведение направленного отрезка $\overline{a}$ на число α, *противоположный и нулевой элементы* определяются также как и в пространствах V_1 и V_2.

Сумма $\overline{a}+\overline{b}$ двух направленных отрезков $\overline{a}$ и $\overline{b}$ находится по правилу параллелограмма

Базис: любая пара неколлинеарных векторов является базисом; $dimV_2=2$.

3. V_3 – все направленные отрезки трехмерного пространства, исходящие из одной точки *O* ($V_1\subset V_3, V_2\subset V_3$).

Произведение направленного отрезка $\overline{a}$ на число α, *противоположный и нулевой элементы* определяются также как и в пространстве V_1.

Сумма $\bar{a}+\bar{b}$ двух направленных отрезков $\bar{a}$ и $\bar{b}$ находится также как и в V_2 по правилу параллелограмма в плоскости, в которой лежат суммируемые направленные отрезки $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

Базис: любая тройка некомпланарных векторов является базисом; $dim V_3 = 3$.

2º. Пространство вещественных матриц $R^{m\times n}$.

$R^{m\times n}$ – множество всех матриц размера $m\times n$ (m строк, n столбцов).

Сумма матриц и *произведение* матрицы на число были определены в главе 3, § 1 .

Нулевой элемент есть нулевая матрица размера $m\times n$.

Противоположный элемент для матрицы есть матрица, получаемая из исходной матрицы путем умножения исходной матрицы на число -1.

Базис. Введем обозначение: E_{ij} – матрица размеров $m\times n$, у которой элемент ij равен единице, а остальные элементы равны нулю. Следующая система векторов (в данном случае это матрицы) является базисом пространства $R^{m\times n}$:

$$E_{11},\ E_{12},\ \ldots,\ E_{1n},\ E_{21},\ E_{22},\ \ldots,$$
$$E_{2n},\ \ldots,\ E_{m1},\ E_{m2},\ \ldots,\ E_{mn}; \tag{1}$$

$$dim R^{m\times n} = m\cdot n$$

Матрицы (1) называют матричными единицами.

Пример. Пусть $m=2$, $n=3$. Рассмотрим следующие два вектора из $R^{2\times 3}$:

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 5\\ 6 & 3 & -2\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}23 & -2 & 6{,}3\\ -4 & 3{,}5 & 7\end{pmatrix}.$$

Их сумма: $A+B=\begin{pmatrix}22 & -2 & 11{,}3\\ 2 & 6{,}5 & 5\end{pmatrix}$.

Произведение $0{,}2A=\begin{pmatrix}-0{,}2 & 0 & 0{,}1\\ 1{,}2 & 0{,}6 & -0{,}4\end{pmatrix}$.

Противоположный вектор для вектора B:

$$-B=(-1)B=\begin{pmatrix}-23 & 2 & -6{,}3\\ 4 & -3{,}5 & -7\end{pmatrix}.$$

Нулевой вектор пространства $R^{2\times3}$: $\bar{0}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$. Базис (4) в пространстве $R^{2\times3}$ выглядит следующим образом:

$$E_{11}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\ E_{12}==\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\ E_{13}==\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

$$E_{21}==\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix},\ E_{22}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix},\ E_{23}==\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}; \qquad (2)$$

$$dim R^{2\times3}=6.$$

Запишем разложение вектора A по базису (2):

$$A=-E_{11}+5E_{13}+6E_{21}+3E_{22}-2E_{23}.$$

Вектор координат вектора $A\in R^{2\times3}$ в базисе (5): $\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 5\\ 6\\ 3\\ -2\end{pmatrix}$.

3^{o}. <u>Арифметическое (координатное) пространство</u> R^n.

R^n – множество всевозможных упорядоченных наборов n действительных чисел. Эти наборы называют n-мерными векторами (арифметическими векторами).

Пространство R^n совпадает с пространствами матриц $R^{1\times n}$, $R^{n\times1}$, поэтому сумма элементов, произведение элемента на число, нулевой элемент, противоположный элемент определяются аналогично тому, как и в пространстве $R^{m\times n}$.

$$\textit{Базис}: \quad \bar{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad \bar{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \qquad (3)$$

$$dim R^n = n.$$

Базис (3) называют единичным базисом в R^n, а векторы (3) – единичными векторами. Отметим также, что векторы координат всех векторов пространства R^n в естественном базисе (3) совпадают с самими векторами.

Пример. Пусть $n = 4$. Рассмотрим следующие два вектора из R^4:

$$\bar{a} = \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ 5 \\ 1{,}3 \end{pmatrix}, \quad \bar{b} = \begin{pmatrix} 18 \\ 3 \\ -2{,}7 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Их сумма $\bar{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} 11 \\ 2{,}3 \\ -2{,}7 \\ 1{,}3 \end{pmatrix}$. Произведение $3\bar{b} = \begin{pmatrix} 54 \\ 9 \\ -8{,}1 \\ -12 \end{pmatrix}$.

Противоположный вектор для вектора $\bar{a}$:

$$-\bar{a} = (-1)\bar{a} = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ -5 \\ -1{,}3 \end{pmatrix}.$$

Нулевой вектор пространства R^4: $\bar{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Базис (3) в пространстве R^4 выглядит следующим образом:

$$\bar{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{e}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \qquad (4)$$

$$dim R^4 = 4.$$

Запишем разложение вектора $\bar{b}$ по базису (4):

$$\bar{b} = 18\bar{e}_1 + 3\bar{e}_2 - 2{,}7\bar{e}_3 - 4\bar{e}_4.$$

Вектор координат вектора $\bar{b}$ в естественном базисе (4): $b_e = \begin{pmatrix} 18 \\ 3 \\ -2{,}7 \\ -4 \end{pmatrix}$, то есть, как отмечалось выше, совпадает с вектором $\bar{b}$.

4°. Пространство многочленов M_n.

M_n – множество всех многочленов степени не выше n, пополненное нулевым многочленом.

Запишем многочлен i-степени не выше n в общем виде:

$$\bar{a} = p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_i x^i, \quad a_i \neq 0,$$
$$i = 0,\ 1,\ \ldots,\ n.$$

Сумма многочленов:

$$\bar{a} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_j x^j$$

и

$$\bar{b} = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_j x^j$$

определяется следующим образом:

$$\overline{a}+\overline{b}=(a_0+b_0)+(a_1+b_1)x+(a_2+b_2)x^2+\ldots+(a_j+b_j)x^j.$$

при любых $a_j,\ b_j \in R,\ j=0,\ 1,\ \ldots,\ n.$

Произведение многочлена $\overline{a}$ на число α :

$$\alpha\cdot\overline{a}=\alpha a_0+\alpha a_1 x+\alpha a_2 x^2+\ldots+\alpha a_i x^i.$$

Нулевой элемент есть многочлен с нулевыми коэффициентами. Он равен числу нуль. Напомним, что нулевой многочлен единственный многочлен, степень которого не определена, а многочлен нулевой степени есть любое число, отличное от нуля.

Противоположный элемент:

$$-\overline{a}=-a_0-a_1x-a_2x^2-\ldots-a_ix^i.$$

Базис:

$$p_0(x)=1,\ p_1(x)=x,\ p_2(x)=x^2,\ \ldots,\ p_n(x)=x^n; \qquad (5)$$

$$dim M_n=n+1.$$

Очевидно, что любой многочлен степени не выше n, уже является линейной комбинацией базисных многочленов (5). Вектор координат многочлена $\overline{a}=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n$, в естественном базисе (5): $\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$.

Пример. Пусть $n=4$. Рассмотрим следующие два вектора из M_4: $\overline{a}=15-26x^2+7x^3$, $\overline{b}=3-41x-3x^3-x^4$.

Их сумма $\overline{a}+\vec{b}=18-41x-26x^2+4x^3-x^4$.

Произведение $-5\overline{a}=-75+130x^2-35x^3$.

Противоположный вектор для вектора $\overline{b}$:

$\overline{b}=(-1)\overline{b}=-3+41x+3x^3+x^4$.

Нулевой вектор пространства M_4: $\overline{0}=0$. Базис (5) в пространстве M_4 выглядит следующим образом:

$$p_0(x)=1,\ p_1(x)=x,\ p_2(x)=x^2,\ p_3(x)=x^3,\ p_4(x)=x^4; \qquad (6)$$
$$dim M_4 = 5.$$

Как отмечалось выше, заданные многочлены $\bar{a}$ и $\bar{b}$ уже являются линейными комбинацией базисных многочленов (6), то есть представляют собой разложения по базису (6):

$$\bar{a} = 15 - 26x^2 + 7x^3 =$$
$$= 15p_0(x) + 0\cdot p_1(x) - 26\cdot p_2(x) + 7\cdot p_3(x) + 0\cdot p_4(x);$$
$$\bar{b} = 3 - 41x - 3x^3 - x^4 =$$
$$= 3\cdot p_0(x) - 41\cdot p_1(x) - 0\cdot p_2(x) - 3\cdot p_3(x) - 1\cdot p_4(x).$$

Векторы координат многочленов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ в естественном базисе (6): $a_p = \begin{pmatrix} 15 \\ 0 \\ -26 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}$, $b_p = \begin{pmatrix} 3 \\ -41 \\ 0 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

5°. Тривиальное пространство (нулевое пространство).

Множество, состоящее из нулевого элемента $\bar{0}$, в котором определены операции $\bar{0}+\bar{0}=\bar{0}$, $\alpha\cdot\bar{0}=\bar{0}$ (для всех $\alpha\in R$), является линейным пространством.

6°. Пространство многочленов M_∞.

M_∞ – множество многочленов всех степеней, пополненное нулевым многочленом.

Запишем многочлен i-степени в общем виде:

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_ix^i, \quad a_i \neq 0,$$
$$i = 0, 1, \ldots, n, \ldots .$$

Сумма элементов, произведение элемента на число, нулевой элемент, противоположный элемент определяются также, как и в пространстве M_n.

Пространство M_∞ бесконечномерно. Для любого $k\in N$ можно указать k линейно независимых многочленов. Например, $p_0(x)=1,\ p_1(x)=x,\ p_2(x)=x^2,\ \ldots,\ p_{k-1}(x)=x^{k-1}$.

7°. Пространство действительных функций $C[S]$.

$C[S]$ – множество всех действительных функций одной действительной переменной, определенных на множестве $S \subset R$, бесконечномерно.

Операции сложения элементов и *произведения элемента на число* есть обычные операции сложения функций и их умножения на действительное число, определенные в теории функций (известны из школьного курса математики), то есть сложение или умножение на число значений функции при каждом значении независимой переменной.

Нулевой элемент есть функция, принимающая нулевое значение на всем множестве S. Противоположный элемент для заданной функции равен этой функции, взятой с противоположным знаком.

§3. Линейные подпространства

Определение. Пусть L – линейное пространство, M – непустое подмножество множества элементов пространства L ($M \subset L$). Если для любых элементов $\bar{a}$, $\bar{b} \in M$ и любого числа α сумма $\bar{a} + \bar{b}$ и произведение $\alpha \bar{a}$ являются элементами множества M: $\bar{a} + \bar{b} \in M$, $\alpha \bar{a} \in M$, то M называется *линейным подпространством линейного пространства* L.

Замечание.1. Линейное подпространство M линейного пространства L по отношению к определенным в L операциям сложения элементов и умножения элемента на число само является линейным пространством.

2. Тривиальное линейное пространство (нулевое пространство) является линейным подпространством любого линейного пространства L. Любое линейное пространство L является линейным подпространством в самом себе. Эти линейные подпространства называют несобственными линейными подпространствами линейного пространства L.

3. Очевидно, что размерность собственного линейного подпространства M меньше размерности L: $dimM < dimL$.

Примеры.

1. Геометрические пространства.

В V_2 всякое подпространство является прямой, проходящей через точку O, то есть все направленные отрезки, принадлежащие этой прямой и исходящие из точки O. Это подпространство является одномерным пространством. Другими словами, V_1 является линейным подпространством геометрического пространства V_2.

В V_3 всякое подпространство является либо прямой (одномерное пространство), либо плоскостью(двумерное пространство), проходящими через точку O, то есть все направленные отрезки, принадлежащие соответственно прямой или плоскости и исходящие из точки O. Другими словами, V_1 и V_2 являются линейными подпространством геометрического пространства V_3.

2. Подпространством пространства многочленов M_n является каждое пространство M_k $(0 \le k \le n)$.

3. Множество всех решений однородной системы линейных алгебраических уравнений $Ax = 0$ является линейным подпространством n-мерного векторного пространства R^n. (Здесь A – матрица размеров $m \times n$, $RgA < n$.) Фундаментальная система решений является базисом этого подпространства. Размерность рассматриваемого подпространства равна $n - RgA$.

При $RgA = n$ система $Ax = 0$ имеет единственное нулевое решение, равное n-мерному нулевому арифметическому вектору пространства R^n, который и образует тривиальное подпространство пространства R^n.

4. Множество решений однородного линейного дифференциального уравнения n-го порядка:

$$y^{(n)} + q_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + q_n(x)y = 0,$$

является линейным подпространством бесконечномерного пространства $C[S]$. Фундаментальная система решений является базисом этого подпространства. Размерность рассматриваемого подпространства равна n.

5. Рассмотрим еще один пример линейного подпространства. Для этого введем понятие линейной оболочки.

Определение. *Линейной оболочкой*, заданной конечной совокупностью $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, ..., $\bar{a}_k$ векторов линейного пространства L, называется множество всех линейных комбинаций этих векторов:

$$\alpha_1 \bar{a}_1 + \alpha_2 \bar{a}_2 + \ldots + \alpha_k \bar{a}_k,$$

Совокупность векторов $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, ..., $\bar{a}_k$ называют порождающей системой векторов данной линейной оболочки. Обозначение линейной оболочки: $L(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_k)$.

Теоремы. 1. $L(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_k)$ - линейное подпространство линейного пространства L.

2. Если какой-либо вектор из порождающей системы векторов является линейной комбинацией остальных векторов этой системы, то его можно удалить из порождающей системы, не изменив линейной оболочки.

3. Пусть в порождающей системе векторов векторы $\bar{a}_{(1)}$, $\bar{a}_{(2)}$, ..., $\bar{a}_{(m)}$ линейно независимые ($m \le k$), а остальные векторы являются их линейной комбинацией. Тогда

1) $L(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_k) = L(\bar{a}_{(1)}, \bar{a}_{(2)}, \ldots, \bar{a}_{(m)})$;

2) $dimL(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_k) = m$;

3) векторы $\bar{a}_{(1)}$, $\bar{a}_{(2)}$, ..., $\bar{a}_{(m)}$ образуют базис линейного подпространства $L(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_k)$.

Автор: Н.С. Никитина