Ортогональные матрицы

Определение. Матрица $Q=(q_{ij})$, $i, j=1, 2, \dots, n$, называется *ортогональной*, если $Q^T Q = E$ (E – единичная матрица).

Свойства ортогональных матриц.

1^0. $|\det Q| = 1$.

2^0. $Q^T = Q^{-1}$.

3^0. $Q^T Q = Q\,Q^T = E$.

4^0. $q_{i1}^2 + q_{i2}^2 + \ldots + q_{in}^2 = \sum\limits_{j=1}^{n} q_{ij}^2 = 1,\ i = 1, 2, \ldots, n;$

$q_{i1}q_{j1} + q_{i2}q_{j2} + \ldots + q_{in}q_{jn} = \sum\limits_{k=1}^{n} q_{ik}q_{jk} = 0$ для всех $i \neq j$. (Аналогичные равенства верны и для столбцов.)

5^0. Пусть $e = (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n)$ - ортонормированный базис в евклидовом пространстве E_n и T – матрица перехода к базису $f = (\bar{f}_1, \bar{f}_2, \ldots, \bar{f}_n)$, то есть $f = eT$. Для того чтобы базис f был ортонормированным, необходимо и достаточно, чтобы матрица T была ортогональной.

6^0. Если Q – ортогональная матрица, то матрицы Q^{-1} и Q^T также ортогональны.

7^0. Если Q_1 и Q_2 – ортогональные матрицы, то их произведение $Q_1 Q_2$ – ортогональная матрица.

Замечание. Свойства $2^0 - 4^0$ являются характеристическими свойствами ортогональных матриц, то есть каждое из них может быть взято в качестве определения ортогональной матрицы.

Линейные операторы, действующие в евклидовых пространствах

Определение. Линейный оператор $\hat{Q}$, действующий в евклидовом пространстве, называется *ортогональным*, если для любых векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ этого пространства выполняется равенство

$$(\hat{Q}\bar{a}, \hat{Q}\bar{b}) = (\bar{a}, \bar{b}).$$

Теорема. В любом ортонормированном базисе $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n)$ евклидова пространства E_n матрица Q_e ортогонального оператора $\hat{Q}$ является ортогональной: $Q^T = Q^{-1}$.

Определение. Пусть $\hat{A}$ – линейный оператор, действующий в евклидовом пространстве E_n. Линейный оператор $\hat{A}^*$ называется *сопряженным* исходному линейному оператору $\hat{A}$, если для любых векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ пространства E_n выполняется равенство

$$(\hat{A}^*\bar{a}, \bar{b}) = (\bar{a}, \hat{A}\bar{b}).$$

Теорема. В любом ортонормированном базисе $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n)$ евклидова пространства E_n для матриц A_e и A_e^*, соответствующих операторам $\hat{A}$ и $\hat{A}^*$, справедливо равенство: $A_e^* = A_e^T$.

Определение. Линейный оператор $\hat{A}$, действующий в евклидовом пространстве, называется *самосопряженным* или *симметрическим*, если для любых векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ этого пространства выполняется равенство

$$(\hat{A}\bar{a}, \bar{b}) = (\bar{a}, \hat{A}\bar{b}).$$

Теорема. В любом ортонормированном базисе $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n)$ евклидова пространства E_n матрица A_e симметрического оператора $\hat{A}$ является симметрической: $A_e = A_e^T$.

Свойства симметрического (самосопряженного) оператора.

1^0. Все n корней характеристического уравнения симметрического оператора – действительные числа и, следовательно, являются его собственными значениями.

2^0. Симметрический оператор всегда имеет собственные векторы.

3^0. Для симметрического оператора, действующего в евклидовом пространстве, существует ортонормированный собственный базис этого оператора.

4^0. Собственные векторы симметрического оператора, соответствующие различным собственным значениям, ортогональны между собой.

Автор: НИКИТИНА Н.С.