Тема: «**Двойные интегралы**»

1. Вычислить двойные интегралы, взятые по прямоугольным областям интегрирования D, заданных неравенствами в скобках.

1) $\iint\limits_D xy\,dxdy$ $\quad (0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 2)$ $\quad$ Ответ: 1

2) $\iint\limits_D e^{x+y}\,dxdy$ $\quad (0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1)$ $\quad$ Ответ: $(e-1)^2$

3) $\iint\limits_D \frac{x^2}{1+y^2}\,dxdy$ $\quad (0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1)$ $\quad$ Ответ: $\frac{\pi}{12}$

4) $\iint\limits_D \frac{dxdy}{(x+y+1)^2}$ $\quad (0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1)$ $\quad$ Ответ: $\ln\frac{4}{3}$

5) $\iint\limits_D \frac{y\,dxdy}{\left(1+x^2+y^2\right)^{3/2}}$ $\quad (0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1)$ $\quad$ Ответ: $\ln\frac{\sqrt{2}+2}{\sqrt{3}+1}$

6) $\iint\limits_D x\sin(x+y)\,dxdy$ $\quad \left(0 \le x \le \pi,\ 0 \le y \le \frac{\pi}{2}\right)$ $\quad$ Ответ: $\pi-2$

7) $\iint\limits_D x^2 y\,e^{xy}\,dxdy$ $\quad (0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 2)$ $\quad$ Ответ: 2

8) $\iint\limits_D x^2 y\cos\left(x\,y^2\right)dxdy$ $\quad \left(0 \le x \le \frac{\pi}{2},\ 0 \le y \le 2\right)$ $\quad$ Ответ: $-\frac{\pi}{16}$

2. Расставить пределы интегрирования в двойном интеграле $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$ при заданных областях интегрирования D в системе координат (x, y), а также, если указано, в координатах (u, v) и полярных координатах (r, φ).

1) D – параллелограмм со сторонами $x=3$, $x=5$, $3x-2y+4=0$, $3x-2y+1=0$; $u=x$, $v=3x-2y$.

$$\text{Ответ: } \int\limits_3^5 dx \int\limits_{(3x+1)/2}^{(3x+4)/2} f(x,y)\,dy = \int\limits_5^{13/2} dy \int\limits_3^{(2y-1)/3} f(x,y)\,dx +$$

$$+\int_{13/2}^{8} dy \int_{(2y-4)/3}^{(2y-1)/3} f(x,y)\,dx + \int_{8}^{19/2} dy \int_{(2y-4)/3}^{5} f(x,y)\,dx =$$

$$=\frac{1}{2}\int_{3}^{5} du \int_{-4}^{-1} f\left(u, \frac{3u-v}{2}\right)dv = \frac{1}{2}\int_{-4}^{-1} dv \int_{3}^{5} f\left(u, \frac{3u-v}{2}\right)du .$$

2) D – треугольник со сторонами $x=0$, $y=0$, $5x+y=2$; $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$.

Ответ: $\int_{0}^{2/5} dx \int_{0}^{2-5x} f(x,y)\,dy = \int_{0}^{2} dy \int_{0}^{(2-y)/5} f(x,y)\,dx =$

$$= \int_{0}^{\pi/2} d\varphi \int_{0}^{2/(5\cos\varphi+\sin\varphi)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,r\,dr .$$

3) $x^2+y^2\le 1$, $x\ge 0$, $y\ge 0$; $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$.

Ответ: $\int_{0}^{1} dx \int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,dy = \int_{0}^{1} dy \int_{0}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,dx =$

$$= \int_{0}^{\pi/2} d\varphi \int_{0}^{1} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,r\,dr .$$

4) $x+y\le 1$, $x-y\le 1$, $x\ge 0$; $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$.

Ответ: $\int_{0}^{1} dx \int_{x-1}^{1-x} f(x,y)\,dy = \int_{-1}^{0} dy \int_{0}^{y+1} f(x,y)\,dx + \int_{0}^{1} dy \int_{0}^{1-y} f(x,y)\,dx =$

$$= \int_{-\pi/2}^{0} d\varphi \int_{0}^{1/(\cos\varphi-\sin\varphi)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,r\,dr +$$

$$+ \int_{0}^{\pi/2} d\varphi \int_{0}^{1/(\cos\varphi+\sin\varphi)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,r\,dr .$$

5) $y \ge x^2,\ y \le 4 - x^2$.

Ответ: $\int\limits_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dx \int\limits_{x^2}^{4-x^2} f(x,y)\,dy = \int\limits_0^2 dy \int\limits_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x,y)\,dx + \int\limits_2^4 dy \int\limits_{-\sqrt{4-y}}^{\sqrt{4-y}} f(x,y)\,dx$.

6) $(x-2)^2 + (y-3)^2 \le 4;\ u = x-2,\ v = y-3;\ u = r\cos\varphi,\ v = r\sin\varphi$.

Ответ: $\int\limits_0^4 dx \int\limits_{3-\sqrt{4x-x^2}}^{3+\sqrt{4x-x^2}} f(x,y)\,dy = \int\limits_1^5 dy \int\limits_{2-\sqrt{6y-y^2-5}}^{2+\sqrt{6y-y^2-5}} f(x,y)\,dx =$

$$= \int\limits_{-2}^{2} du \int\limits_{-\sqrt{4-u^2}}^{\sqrt{4-u^2}} f(u+2, v+3)\,dv = \int\limits_{-2}^{2} dv \int\limits_{-\sqrt{4-v^2}}^{\sqrt{4-v^2}} f(u+2, v+3)\,du =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 f(r\cos\varphi + 2, r\sin\varphi + 3)\,r\,dr.$$

7) D– область, ограниченная параболами $y = x^2,\ y = \sqrt{27x}$.

Ответ: $\int\limits_0^3 dx \int\limits_{x^2}^{\sqrt{27x}} f(x,y)\,dy = \int\limits_0^9 dy \int\limits_{y^2/27}^{\sqrt{y}} f(x,y)\,dx$.

8) D – параллелограмм со сторонами $y = x$, $y = x+3$, $y = -2x+1$, $y = -2x+5$; $u = 2x+y$, $v = x-y$.

Ответ:

$$= \int\limits_{-2/3}^{1/3} dx \int\limits_{-2x+1}^{x+3} f(x,y)\,dy + \int\limits_{1/3}^{2/3} dx \int\limits_{x}^{x+3} f(x,y)\,dy + \int\limits_{2/3}^{5/3} dx \int\limits_{x}^{-2x+5} f(x,y)\,dy =$$

$$= \int\limits_{1/3}^{5/3} dy \int\limits_{(1-y)/2}^{y} f(x,y)\,dx + \int\limits_{5/3}^{7/3} dy \int\limits_{(1-y)/2}^{(5-y)/2} f(x,y)\,dx + \int\limits_{7/3}^{11/3} dy \int\limits_{y-3}^{(5-y)/2} f(x,y)\,dx =$$

$$=\frac{1}{3}\int_{1}^{5} du \int_{-3}^{0} f\left(\frac{u+v}{3}, \frac{u-2v}{3}\right)dv = \frac{1}{3}\int_{-3}^{0} dv \int_{1}^{5} f\left(\frac{u+v}{3}, \frac{u-2v}{3}\right)du.$$

9) $y-2x \le 0$, $3y-x \ge 0$, $xy \le 2$ $x \ge 0$, $y \ge 0$; $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$; $u = xy$, $v = \dfrac{y}{x}$.

$$\text{Ответ: } \int_{0}^{1} dx \int_{x/3}^{2x} f(x,y)\,dy + \int_{1}^{\sqrt{6}} dx \int_{x/3}^{2/x} f(x,y)\,dy =$$

$$= \int_{0}^{\sqrt{6}/3} dy \int_{y/2}^{3y} f(x,y)\,dx + \int_{\sqrt{6}/3}^{2} dy \int_{y/2}^{2/y} f(x,y)\,dx =$$

$$= \int_{\operatorname{arctg}(1/3)}^{\operatorname{arctg} 2} d\varphi \int_{0}^{2/\sqrt{\sin 2\varphi}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\, r\,dr =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{0}^{2} du \int_{1/3}^{2} f\left(\sqrt{\frac{u}{v}}, \sqrt{uv}\right)\frac{dv}{v} = \frac{1}{2}\int_{1/3}^{2} \frac{dv}{v} \int_{0}^{2} f\left(\sqrt{\frac{u}{v}}, \sqrt{uv}\right)du.$$

10) $y^2 \le 8x$, $y \le 2x$, $y + 4x - 12 \le 0$.

$$\text{Ответ: } \int_{0}^{2} dx \int_{-\sqrt{8x}}^{2x} f(x,y)\,dy + \int_{2}^{9/2} dx \int_{-\sqrt{8x}}^{12-4x} f(x,y)\,dy =$$

$$= \int_{-6}^{0} dy \int_{y^2/8}^{(12-y)/4} f(x,y)\,dx + \int_{0}^{4} dy \int_{y/2}^{(12-y)/4} f(x,y)\,dx.$$

11) $xy \le 2$, $xy \ge 1$, $y \ge x$, $y \le 2x$, $x > 0$, $y > 0$; $u = xy$, $v = \dfrac{y}{x}$; $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$.

Ответ: $\int\limits_{1/\sqrt{2}}^{1} dx \int\limits_{1/x}^{2x} f(x,y)\,dy + \int\limits_{1}^{\sqrt{2}} dx \int\limits_{x}^{2/x} f(x,y)\,dy =$

$$= \int\limits_{1}^{\sqrt{2}} dy \int\limits_{1/y}^{y} f(x,y)\,dx + \int\limits_{\sqrt{2}}^{2} dy \int\limits_{y/2}^{2/y} f(x,y)\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{1}^{2} du \int\limits_{1}^{2} f\left(\sqrt{\frac{u}{v}}, \sqrt{uv}\right)\frac{dv}{v} = \frac{1}{2}\int\limits_{1}^{2} \frac{dv}{v} \int\limits_{1}^{2} f\left(\sqrt{\frac{u}{v}}, \sqrt{uv}\right) du =$$

$$= \int\limits_{\pi/4}^{\operatorname{arctg} 2} d\varphi \int\limits_{2/\sqrt{2\sin 2\varphi}}^{2/\sqrt{\sin 2\varphi}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\, r\,dr.$$

3. Вычислить интегралы.

1) $\int\limits_{0}^{a} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{x}} dy$ $(a > 0)$, Ответ: $\dfrac{2a\sqrt{a}}{3}$.

2) $\int\limits_{2}^{4} dx \int\limits_{x}^{2x} \dfrac{y}{x} dy$, Ответ: 9.

3) $\int\limits_{-1}^{1} dy \int\limits_{y^2-3}^{4} (x+2y)\,dx$, Ответ: $\dfrac{44}{5}$.

4) $\int\limits_{1}^{2} dy \int\limits_{0}^{\ln y} e^x dx$, Ответ: $\dfrac{1}{2}$.

5) $\iint\limits_{D} (x^2 + y)\,dxdy$, D – область, ограниченная параболами $y = x^2$, $y^2 = x$. Ответ: $\dfrac{33}{140}$.

6) $\iint\limits_{D} \dfrac{x^2}{y^2}\,dxdy$, D – область, ограниченная прямыми $x = 2$, $y = x$ и гиперболой $xy = 1$. Ответ: $\dfrac{9}{4}$.

7) $\iint\limits_D \cos(x+y)\,dxdy$, D – область, ограниченная прямыми $x=0$, $y=\pi$, $y=x$. Ответ: -2.

4. Вычислить интегралы, переходя к полярным координатам.

1) $\iint\limits_D \sqrt{9-x^2-y^2}\,dxdy$, D – круг радиуса 1 с центром в начале координат. Ответ: $\frac{2\pi}{3}\left(27-16\sqrt{2}\right)$.

2) $\iint\limits_D x\,y\,dxdy$, D – полукруг диаметра a с центром в точке $\left(-\frac{a}{2}, 0\right)$, лежащий выше оси Ox. Ответ: $-\frac{a^4}{24}$.

3) $\iint\limits_D (x^2+y^2)\,dxdy$, D – область, ограниченная окружностью $x^2+y^2=2ax$. Ответ: $\frac{3\pi a^4}{2}$.

4) $\iint\limits_D \left(4+x-y\right)dxdy$, D – четверть круга $x^2+y^2\le 1$, лежащий во втором квадранте. Ответ: $\pi-\frac{2}{3}$.

5) $\iint\limits_D x^2\,dxdy$, D – круг $x^2+y^2\le R^2$. Ответ: $\frac{\pi R^4}{4}$.

6) $\iint\limits_D (x+y)\,dxdy$, D – область в третьем квадранте, ограниченная прямыми $y=x$, $y=x\sqrt{3}$ и окружностью $x^2+y^2=4$.

Ответ: $\frac{4}{3}\left(1-\sqrt{3}\right)$.

Автор: Никитина Н.С.