1. Определение матрицы и вектора

<u>Определение</u>. *Матрицей* размеров $m \times n$ называется совокупность $m\,n$ чисел, расположенных в виде таблицы из m строк и n столбцов:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Обозначения

1) для матриц: $A, B, C, X, Y, Z,\ A = (a_{ij})$;

2) для элементов матрицы: $(A)_{ij} = (a_{ij})$, i – номер строки, j – номер столбца, $i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$, (на пересечении i-й строки и j-го столбца находится число a_{ij}).

Если $m = n$, то матрица называется *квадратной*, а число n ее *порядком*. Остальные матрицы называют *прямоугольными*.

Если $n = 1$: $\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$ – матрица-столбец (или вектор-столбец).

Если $m = 1$: $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \end{pmatrix}$ – матрица-строка (или вектор- строка).

<u>Определение</u>. Квадратная матрица $E = (a_{ij})$ называется *единичной*, если

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, i = j, \\ 0, i \neq j, \end{cases} \quad i, j = 1, 2, \dots, n.$$

2. Действия над матрицами

<u>Определение</u>. Пусть матрицы $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ – матрицы одинаковых размеров $m \times n$. Суммой матриц A и B называется матрица $A + B = (c_{ij})$, определяемая формулами:

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad (i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n).$$

<u>Определение</u>. *Произведением* матрицы $A = (a_{ij})$ на число $\alpha \in R$ называется матрица $\alpha\,A = (c_{ij})$, определяемая формулами

$$c_{ij} = \alpha\,a_{ij} \quad (i = 1, 2, \dots, m; \quad j = 1, 2, \dots, n).$$

<u>Определение</u>. Матрица $A - B = A + (-1)\,B$ называется *разностью* матриц

A и B.

Определение. *Произведением* матрицы $A=(a_{ij})$ размеров $m\times k$ на матрицу $B=(b_{ij})$ размеров $k\times n$ называется матрица $AB=(c_{ij})$, определяемая формулами

$$c_{ij}=\sum_{s=1}^{k} a_{is}\, b_{sj} \qquad (i=1,2,\ldots,n;\;\; j=1,2,\;\ldots,m).$$

Другими словами, элемент c_{ij} произведения $A\,B$ есть скалярное произведение i-й строки матрицы A на j-й столбец матрицы B.

Определение. Матрица A^{T}, полученная из матрицы A заменой строк на соответствующие столбцы, называется матрицей, транспонированной к $A=(a_{ij})$, то есть $A^{\mathrm{T}}=(a_{ji})$.

Свойства сложения и умножения матриц (теоремы).

1. Коммутативность:

$$A+B=B+A,\quad \alpha A=A\alpha \;\; (\alpha\in R),$$

$AB\neq BA$ (произведение матриц некоммутативно!);

2. Ассоциативность:

$$(A+B)+C=A+(B+C),\quad (\alpha\beta)A=\alpha(\beta A),\quad (AB)C=A(BC);$$

3. Дистрибутивность:

$$\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B,\quad (\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A\;\;(\alpha,\beta\in R),$$

$$A(B+C)=AB+AC,\quad (B+C)D=BD+CD$$

3. Определители

Определение. *Определителем* матрицы второго порядка $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$ называется число $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$.

Пусть $A=(a_{ij})$ – квадратная матрица. Матрицу, полученную из матрицы A вычеркиванием i-й строки j-го столбец будем называть *подматрицей* матрицы A и обозначать M_{ij}.

$\det M_{ij}$ называют (дополнительным) *минором* элемента a_{ij}.

Определение. Число $A_{ij}=(-1)^{i+j}\det M_{ij}$ называется *алгебраическим дополнением* элемента a_{ij}.

Определение. Определителем матрицы $A=(a_{ij})$ n-го порядка называется число $$\det A = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \ldots + a_{1n}A_{1n} = \sum_{k=1}^{n} a_{1k}A_{1k}.$$

<u>Теоремы</u>

1) о разложении по i-й строке:

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

2) о разложении по j-му столбцу:

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}A_{kj} \qquad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

<u>Свойства определителей</u>

1. $\det A^T = \det A$; $\det(AB) = \det A \det B$; $\det A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}$;

если A – невырожденная матрица n-го порядка, то $\det(\alpha A) = \alpha^n \det A$.

2. Определитель треугольной матрицы равен произведению элементов главной диагонали.

3. Определитель матрицы, имеющей два пропорциональных столбца (две пропорциональные строки), равен нулю.

4. Определитель матрицы, имеющей нулевой столбец (нулевую строку), равен нулю.

5. Если в матрице A поменять местами любые два столбца (две строки) и полученную матрицу обозначить через B, то $\det B = -\det A$.

6. Если в матрице A один из столбцов (одну из строк) умножить на какое-либо число α и полученную матрицу обозначить через B, то $\det B = \alpha \det A$.

7. Если в матрице A один из столбцов заменить на сумму этого столбца и любого другого столбца, умноженного на какое-либо число, и полученную матрицу обозначить через B, то $\det B = \det A$. Аналогичное утверждение верно и для строк.

8. Пусть $\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \ldots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \ldots & A_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{n1} & A_{n2} & \ldots & A_{nn} \end{pmatrix}$. Тогда

$$\tilde{A}^T A = A\,\tilde{A}^T = \begin{pmatrix} \det A & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \det A & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \det A \end{pmatrix} \text{ и } \det \tilde{A} = (\det A)^{n-1}.$$

Замечание. Матрицу $\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$, получающуюся из матрицы $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ путем замены каждого ее элемента алгебраическим дополнением этого элемента, называется *присоединенной* (или *взаимной*) матрицей к матрице *A*.

4. Обратная матрица.

<u>*Определение*</u>. *Обратной* по отношению к квадратной матрице *A* называется матрица A^{-1}, удовлетворяющие равенствам

$$A\,A^{-1} = A^{-1}A = E\,.$$

Если $\det A = 0$, то матрицу *A* называют *вырожденной*, если $\det A \neq 0$, то матрицу *A* называют *невырожденной*.

<u>*Теорема*</u>. Для невырожденной матрицы существует единственная обратная матрица $A^{-1} = (u_{ij})$, причем

$$u_{ij} = \frac{A_{ji}}{\det A} \qquad \text{или} \qquad A^{-1} = \frac{\tilde{A}^T}{\det A}.$$

5. Матричные уравнения

Пусть *A, B, C* – заданные матрицы; *X* – матрица, подлежащая определению. Матрицы таковы, что ниже приведенные их произведения определены и существуют необходимые обратные матрицы.

Приведем простейшие матричные уравнения и их решения.

(I) $A X = B$. (1)

Обе части уравнения (1) умножаем на A^{-1} слева: $A^{-1}A X = A^{-1}B$. Отсюда, так как $AA^{-1} = E$, имеем $X = A^{-1}B$.

(II) $X A = B$. (2)

Обе части уравнения (2) умножаем на A^{-1} справа: $X AA^{-1} = BA^{-1}$. Отсюда, так как $AA^{-1} = E$, имеем $X = BA^{-1}$.

(III) $A X B = C$. (3

Обе части уравнения (3) умножаем на A^{-1} слева и на B^{-1} справа: $A^{-1}A X B B^{-1} = A^{-1}C B^{-1}$. Отсюда, так как $A^{-1}A = E$, $B B^{-1} = \tilde{E}$, имеем $X = A^{-1}C B^{-1}$. (Здесь E, $\tilde{E}$ – единичные матрицы, отличающиеся порядком.)

6. Матричные функции в Excel

=МОБР(*массив*)	возвращает матрицу A^{-1}, обратную для заданной квадратной матрицы A ($det A \neq 0$, после ввода формулы нажать комбинацию клавиш Ctrl+Shift+Enter);
=МОПРЕД(*массив*)	возвращает определитель (детерминант) $det A$ квадратной матрицы A;
=МУМНОЖ(*массив1;массив2*)	выполняет умножение матрицы $A = \{a_{ij}\}$ размером $m \times k$ на матрицу $B = \{b_{ij}\}$ размером $k \times n$ (после ввода формулы нажать комбинацию клавиш Ctrl+Shift+Enter);
=ТРАНСП(*массив*)	на основе исходной матрицы A строит, транспонированную к ней матрицу A^T (после ввода формулы нажать комбинацию клавиш Ctrl+Shift+Enter).

Автор: Н.С. НИКИТИНА